Konstruktivní geometrie

Fakulta strojní

Přednášející:

Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Katedra matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci

budova **G** – 4. patro – kancelář 4072

e-mail: **daniela.bimova@tul.cz**
telefon: 485 352 808

Sylabus předmětu

Přednášky:

1. Analytická geometrie v E_3. Rovnice přímky a roviny.
2. Polohové a metrické úlohy v E_3.
3. Základní principy promítání (rovnoběžné a středové), speciální typy promítání (Mongeovo promítání, pravoúhlá axonometrie atd.)
4. Zobrazení základních prvků a těles v Mongeově promítání.
5. Šroubovice, základní vlastnosti šroubovice.
6. Konstruktivní úlohy o šroubovici.
7. Vektorová funkce jedné reálné proměnné. Definice a rovnice křivky.
8. Průvodní trojhran křivky, křivost.
9. Pojem plochy, křivky na ploše, tečná rovina plochy.
10. Rotační plochy (RP), meridián RP, tečná rovina RP.
11. Konstruktivní úlohy o RP, řez RP rovinou. Průniky RP.
12. Šroubové plochy. Základní pojmy a vlastnosti. Přímkové a cyklické šroubové plochy.
13. Konstruktivní úlohy o šroubových plochách.
14. Kinematická geometrie křivek.

Studijní literatura

Povinná literatura:

- URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie I*, SNTL, Praha, 1967.
- URBAN, A.: *Deskriptivní geometrie II*, SNTL, Praha, 1982.
- FABIÁNOVÁ, H.: *Konstruktivní geometrie.* Ediční středisko VŠST, Liberec 1992. *ISBN* 80-7083-086-7

Doporučená literatura:

- POMYKALOVÁ, E.: *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. Prometheus, Praha, 2010. ISBN 978-80-7196-400-1.
- PŘÍVRATSKÁ, J.: *Geometrie pro techniky - modul 0*. TUL, Liberec, 2004. ISBN 80-7083-795-0.
- PŘÍVRATSKÁ, J.: *Geometrie pro techniky - modul 0S*. TUL, Liberec, 2004. ISBN 80-7083-810-8.
- PŘÍVRATSKÁ, J.: *Geometrie pro techniky - modul 1*. TUL, Liberec, 2007. ISBN 80-7372-194-7.
- PECINA, V., PŘÍVRATSKÁ, J.: *Geometrie pro techniky - modul 2*. TUL, Liberec, 2002. ISBN 80-7083-771-3.
- PŘÍVRATSKÁ, J., PECINA, V., BÍMOVÁ, D.: *Geometrie pro techniky - modul 3*. TUL, Liberec, 2003. ISBN 80-7083-673-3.
- DRÁBEK, K., HARANT, F., SETZER, O.: *Deskriptivní geometrie II*. SNTL, Praha 1979.
- VORÁČOVÁ, Š. a kol.: *Atlas geometrie.* Academia, Praha 2012. ISBN 978-80-200-1575-4.
- PARÉ, E.G., LOVING, R.O., HILL, I.L., PARÉ, R.C.: *Descriptive geometry*, *8th edition*. Macmillan Publishing Company, New York, USA 1991. ISBN 0-02-391331-2.

Internetové odkazy

- **https://kma.fp.tul.cz/department/members/daniela-bimova**
- Mongeovo promítání**: https://www.geogebra.org/m/RQdvjH3V**
- Šroubovice – CZ: **https://www.geogebra.org/m/rvqydysu**
- Šroubovice – EN (rozšířené): **https://www.geogebra.org/m/VC4J2KTM**
- Rotační plochy: **https://www.geogebra.org/m/nxgwgwuz**

- Konstruktivní geometrie FS VŠB-TUO: **https://www.geogebra.org/m/etqmeu3b**

ANALYTICKÁ GEOMETRIE

Analytická geometrie je část geometrie, která v euklidovské geometrii zkoumá geometrické útvary pomocí algebraických a analytických metod.

V analytické geometrii jsou geometrické útvary v prostoru vyjadřovány čísly (např. každý bod je vyjádřen uspořádanou skupinou čísel – tzv. souřadnicemi – v rovině jsou to dvě čísla, v prostoru potom tři) a rovnicemi ve zvolených souřadnicových soustavách. Přitom rovnicím geometrických útvarů vyhovují souřadnice bodů těchto útvarů.

Za zakladatele analytické geometrie je považován René Descartes.

René Descartes

* 31.3.1596 La Haye – † 11.2.1650 Stockholm

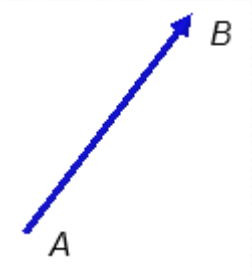
- francouzský filosof, matematik a fyzik

Významně se podílel na rozvoji matematiky a fyziky, na vytvoření číselné reprezentace geometrických objektů známé jako kartézská soustava souřadnic.

Společně s Pierrem de Fermatem (1601 – 1665) je považován za zakladatele analytické geometrie. Základní metody analytické geometrie publikoval René Descartes v roce 1637 ve svém prvním díle zvaném *Rozpravy o metodě*. Toto dílo publikoval anonymně.

Vektory

Orientovaná úsečka



Orientovanou úsečkou *AB* nazveme úsečku, pro kterou definujeme její počáteční (*A*) a její koncový bod (*B*).

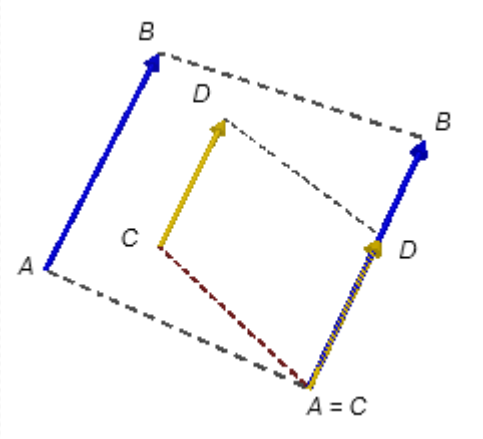
1. Velikost orientované úsečky

Velikost orientované úsečky, tj. vzdálenost bodů *A, B*, označíme |*AB*|.

Splývá-li počáteční bod orientované úsečky s jejím koncovým bodem, tj. je-li $A \equiv B$, pak mluvíme o **nulové** orientované úsečce, neboť její velikost je rovna nule.

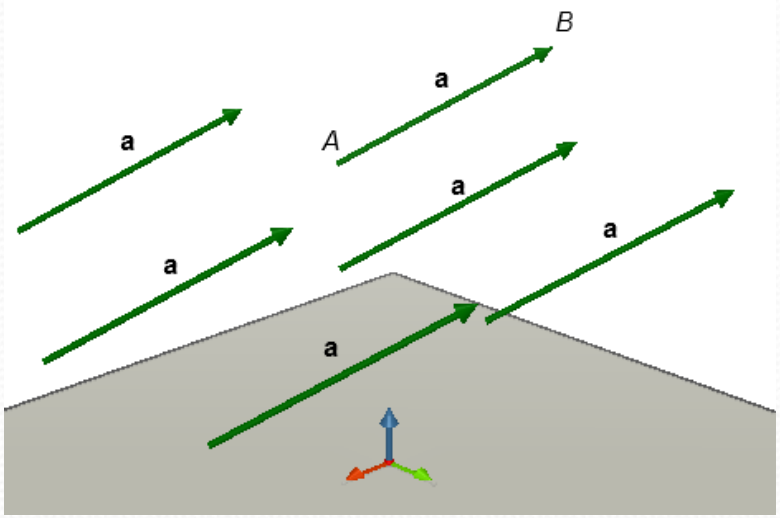
Dvě rovnoběžné nenulové orientované úsečky *AB* a *CD* jsou

- **souhlasně orientované** (**souhlasně rovnoběžné**), jestliže po jejich posunutí do polohy se společným počátkem $A \equiv C$ leží bod *D* na polopřímce *AB ;*
- **nesouhlasně orientované** (**nesouhlasně rovnoběžné**), leží-li bod *D* na opačné polopřímce k polopřímce *AB.*



Geometrická reprezentace vektoru

Vektorem **a** nazveme množinu všech rovnoběžných, souhlasně orientovaných a stejně velkých úseček. Každou z těchto úseček nazýváme umístěním vektoru. (Např. orientovaná úsečka ***AB*** je umístěním vektoru **a**.



Dva vektory **a** a **b** nazveme (ne)souhlasně orientované, jsou-li jejich libovolná umístění (ne)souhlasně orientované úsečky.

1. Velikost vektoru

Velikostí vektoru rozumíme velikost jeho libovolného umístění.

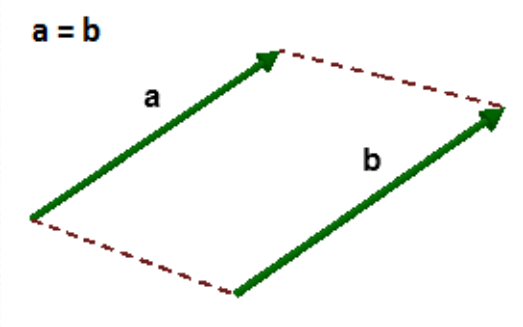
Je-li |**AB**| = |**a**| = 1, nazýváme vektor **a jednotkovým vektorem**.

2. Operace s geometrickými vektory

2.1 Rovnost vektorů

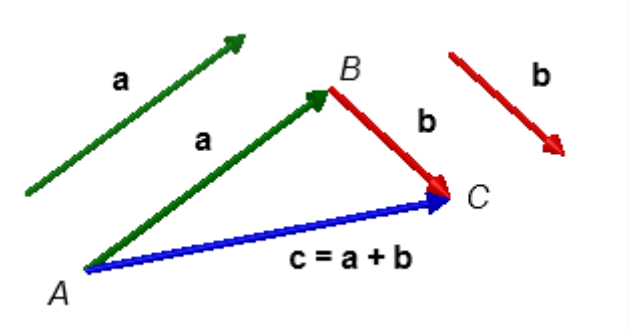
Dva vektory **a, b** jsou si rovny, jsou-li reprezentovány stejnou množinou rovnoběžných, souhlasně orientovaných a stejně velkých orientovaných úseček.

Označujeme **a** = **b**.



2.2 Součet vektorů

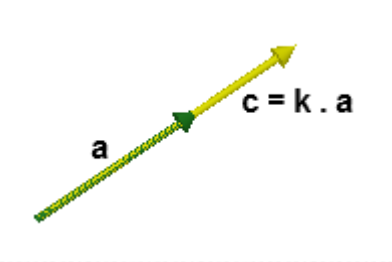
Předpokládejme, že jsou dány dva vektory **a** a **b**, pak vektor **c** nazveme součtem vektorů **a, b,** jestliže platí: je-li orientovaná úsečka *AB* umístěním vektoru **a** a orientovaná úsečka *BC* umístěním vektoru **b**, pak orientovaná úsečka *AC* je umístěním vektoru **c**. Tj. vektor **c =** *AC* je vektor s počátečním bodem v bodě *A* a s koncovým bodem v bodě *C* reprezentující součet vektorů **a + b**.



2.3 Násobek vektoru reálným číslem α

Vektor

$$\mathbf{c} = k \cdot \mathbf{a},$$



kde k je reálné číslo, nazveme k-násobkem vektoru **a,** jsou-li definovány následující vlastnosti:

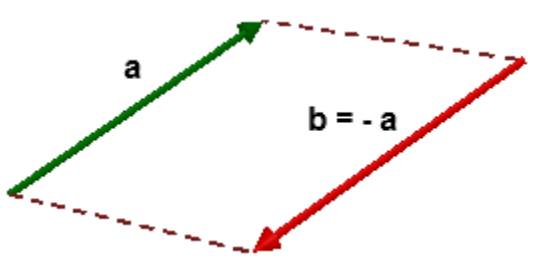
a) je-li $k = 0$ nebo $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ je nulový vektor), pak je $\mathbf{c} = k \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$;

b) je-li $k \neq 0$ a $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, potom vektor $\mathbf{c} = k \,.\, \mathbf{a}$ má stejný směr jako vektor **a**, jeho velikost je $|k|$ násobek velikosti vektoru **a**, tj.

$$|\mathbf{c}| = |k| \cdot |\boldsymbol{a}|.$$

Orientace vektoru $\mathbf{c} = k \cdot \mathbf{a}$ je stejná jako orientace vektoru **a**, je-li $k > 0$, a opačná jako orientace vektoru **a**, je-li $k < 0$.

Poznámka: Vektor **b** je opačný k vektoru **a**, má-li stejný směr a velikost jako vektor **a**, ale opačnou orientaci. Opačný vektor k vektoru **a** můžeme získat tak, že budeme násobit vektor **a** číslem (–1). Opačný vektor k vektoru **a** se obvykle značí (–**a**).



Důsledky výše uvedených definic jsou následující vztahy:

Nechť **a, b** a **c** jsou libovolné vektory, **0** nulový vektor a α, β reálná čísla, pak pro ně platí:

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (komutativní zákon)

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (asociativní zákon)

c) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

d) Ke každému vektoru **a** existuje vektor (– **a**) tak, že platí $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

e) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{a} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{a}$ (distributivní zákon)

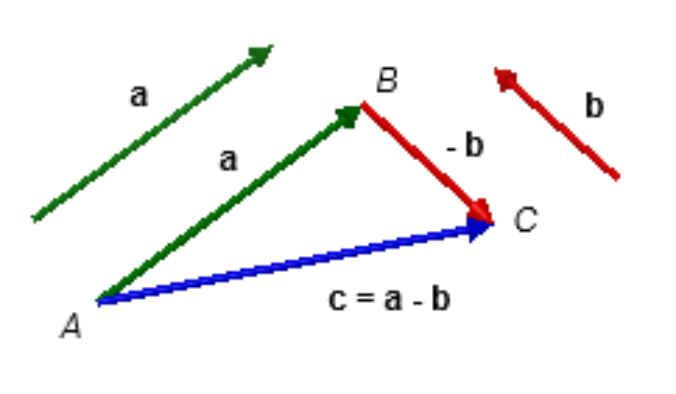
f) $\alpha \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\,\mathbf{a} + \alpha\,\mathbf{b}$ (distributivní zákon)

g) $\alpha\,(\beta\,\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\,\mathbf{a}$

2.4 Odčítání vektorů

Odčítání vektoru **b** od vektoru **a** je definováno jako součet vektoru **a** s vektorem opačným k vektoru **b**, tj.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$



2.5 Lineární kombinace vektorů

Lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ nazveme vektor **a**, jestliže existují reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ taková, že

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \mathbf{a}_n.$$

Skupina vektorů $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ je **lineárně závislá**, jestliže existuje alespoň jeden koeficient $\alpha_k \neq 0$ a platí

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Skupina vektorů $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, …, $\mathbf{a}_n$ je **lineárně nezávislá**, jestliže

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

pouze když $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

2.5.1 Vektory kolineární

Nechť jsou dány dva lineárně závislé vektory **a, b,** pak můžeme psát např.

$$\mathbf{b} = \alpha \cdot \mathbf{a}.$$

Z definice α násobku vektoru víme, že umístění vektorů **a, b** jsou rovnoběžná s touž přímkou (tj. vektory **a, b** jsou rovnoběžné).

Vektory rovnoběžné se stejnou přímkou nazýváme **kolineární.**

2.5.2 Vektory komplanární

Nechť jsou dány tři lineárně závislé vektory **a, b, c**, pak alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních. Nechť je to např. vektor **c**, tj.

$$\mathbf{c} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}.$$

Podle definice součtu vektorů platí, že je-li $\alpha \cdot \mathbf{a} = \mathbf{AB}$, $\beta \cdot \mathbf{b} = \mathbf{BC}$, pak je $\mathbf{c} = \mathbf{AC}$. Protože vektor **a** je rovnoběžný s vektorem $\alpha \cdot \mathbf{a} = \mathbf{AB}$ a vektor **b** s vektorem $\beta \cdot \mathbf{b} = \mathbf{BC}$, je možné v rovině *ABC* najít alespoň jedno umístění vektorů **a, b, c,** tj. vektory **a, b, c** jsou rovnoběžné s rovinou *ABC.*

Vektory rovnoběžné s jednou rovinou nazveme **komplanární.**

2.5.3 Báze vektorového prostoru

Nechť jsou ve vektorovém prostoru E_3 dány tři lineárně nezávislé vektory **a, b, c**, pak tyto vektory tvoří v daném vektorovém prostoru **bázi** a libovolný vektor **u** vektorového prostoru lze vyjádřit jednoznačně jako jejich lineární kombinaci, tj.

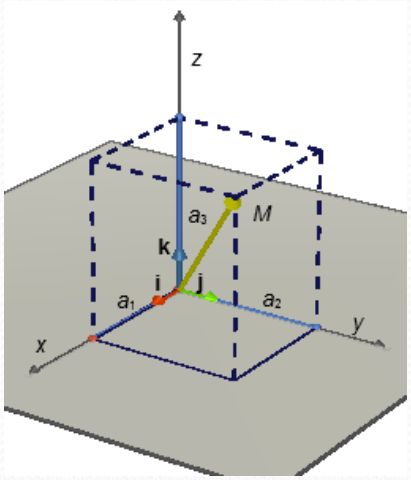
$$\mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b} + \gamma \cdot \mathbf{c},$$

kde α, β, γ jsou reálná čísla.

Aritmetická reprezentace vektoru

1. Souřadnice vektoru

Nechť je dána kartézská souřadnicová soustava O_{xyz}. Na souřadnicových osách *x, y, z* můžeme definovat trojici jednotkových vektorů **i, j** a **k.** Jednotkové vektory **i, j** a **k** přitom volíme tak, aby jejich umístění měla společný počátek v počátku O_{xyz} dané souřadnicové soustavy a aby se jejich směr shodoval s kladným směrem souřadnicových os.



Je možné dokázat, že trojice jednotkových vektorů **i, j** a **k** je lineárně nezávislá, proto lze libovolný vektor **a** vyjádřit jako jejich lineární kombinaci, tj.

$$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}.$$

Vektory a_1 **i,** a_2 **j,** a_3 **k** nazýváme **složkami vektoru a** a reálná čísla a_1**,** a_2 **,** a_3 **souřadnicemi vektoru a**. Vektor **a** pak píšeme ve tvaru **a** = (a_1**,** a_2 **,** a_3).

2. Souřadnice vektoru v závislosti na souřadnicích bodů

Nechť je v trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 dán libovolný bod A. Vektor **OA** lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů **i, j, k**, tj.

$$\mathbf{OA} = x_A\,\mathbf{i} + y_A\,\mathbf{j} + z_A\,\mathbf{k}.$$

Čísla x_A, y_A, z_A nazveme (kartézskými) **souřadnicemi** bodu A a píšeme $A = [x_A, y_A, z_A]$.

Nechť jsou ve trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 dány dva libovolné body $A = [x_A, y_A, z_A]$ a $B = [x_B, y_B, z_B]$. Je-li **AB** umístění vektoru **a**, pak souřadnice vektoru **a** vypočteme ze vztahu

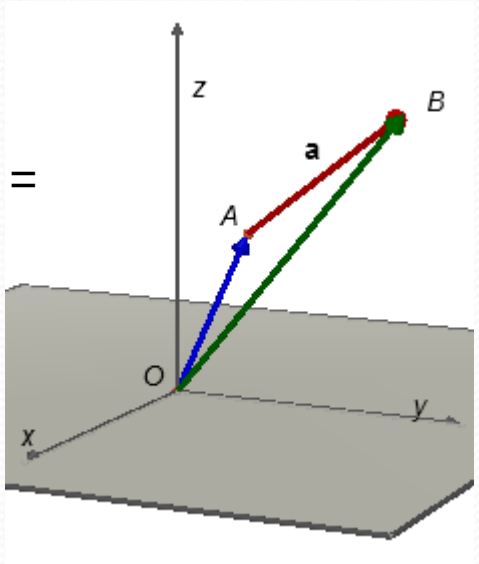
$$\mathbf{OA} + \mathbf{a} = \mathbf{OB},$$

tj.

$$\mathbf{a} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = x_B\,\mathbf{i} + y_B\,\mathbf{j} + z_B\,\mathbf{k} - (x_A\,\mathbf{i} + y_A\,\mathbf{j} + z_A\,\mathbf{k}) =$$
$$= (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k},$$

Odkud

$$\mathbf{a} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = B - A.$$



2. Operace s aritmetickými vektory

Předpokládejme, že ve vektorovém prostoru E_3 máme dané dva vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ pomocí souřadnic, pak platí následující pravidla:

a) dva vektory **a, b** jsou si rovny, tj. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, právě když $a_i = b_i$ pro $i = 1, 2, 3$;

b) souřadnice součtu vektorů dostaneme ze vztahu

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3);$$

c) souřadnice α-násobku, kde $\alpha \in \mathbf{R}$, vektoru jsou určeny vztahem

$$\alpha \cdot \mathbf{a} = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3);$$

d) souřadnice nulového vektoru jsou dány předpisem

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0);$$

e) souřadnice jednotkových vektorů na souřadnicových osách jsou dány předpisy

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0),\ \mathbf{j} = (0, 1, 0),\ \mathbf{k} = (0, 0, 1);$$

f) velikost vektoru **a** je dána předpisem

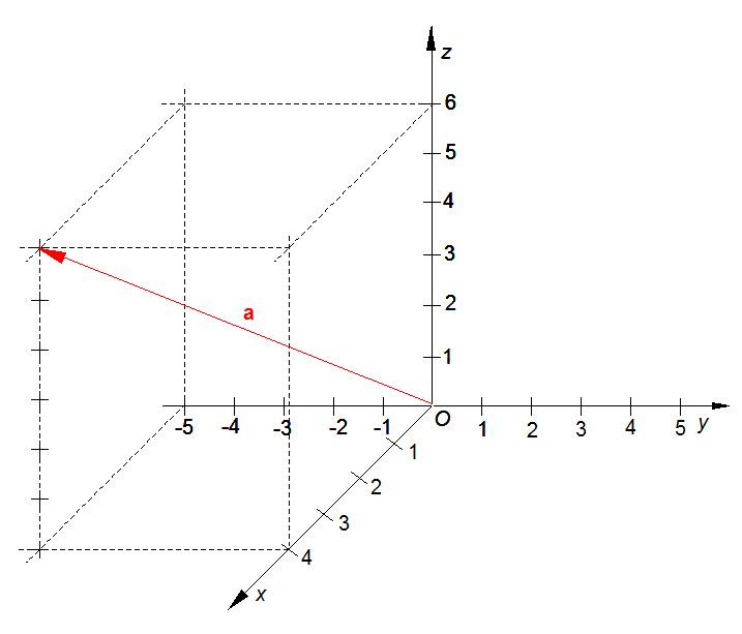
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$$

g) jednotkový vektor **příslušný k vektoru a** je dán předpisem

$$\mathbf{u} = \left(\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} \right)$$

Příklad 2.1:

V ortonormální souřadnicové soustavě načrtněte vektor **a** = (4, -5, 6).



Příklad 2.2:

Ve trojrozměrném euklidovském prostoru E_3 jsou dány body A = [3, 7, -2] a B = [-4, 0, 5]. Napište souřadnice vektoru **a** = **AB**.

a = **AB** = $B - A$ = (– 4 – 3, 0 – 7, 5 – (– 2)) = (– 7, – 7, 7)

Příklad 2.3:

Vypočtěte x, y, z z vektorové rovnice $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{a} = (-3, 5, -1)$, $\mathbf{b} = (x + 2, y, -6 + 5z)$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

$$(-3, 5, -1) = (x + 2, y, -6 + 5z) \Leftrightarrow -3 = x + 2 \wedge 5 = y \wedge -1 = -6 + 5z$$

$$x = -5 \qquad y = 5 \qquad z = 1$$

Příklad 2.4:

Najděte souřadnice vektoru $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{a} = (1, -3, 8)$ a $\mathbf{b} = (-6, 0, -7)$.

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (1, -3, 8) + (-6, 0, -7) = (1 + (-6), -3 + 0, 8 + (-7)) = (-5, -3, 1)$$

Příklad 2.5:

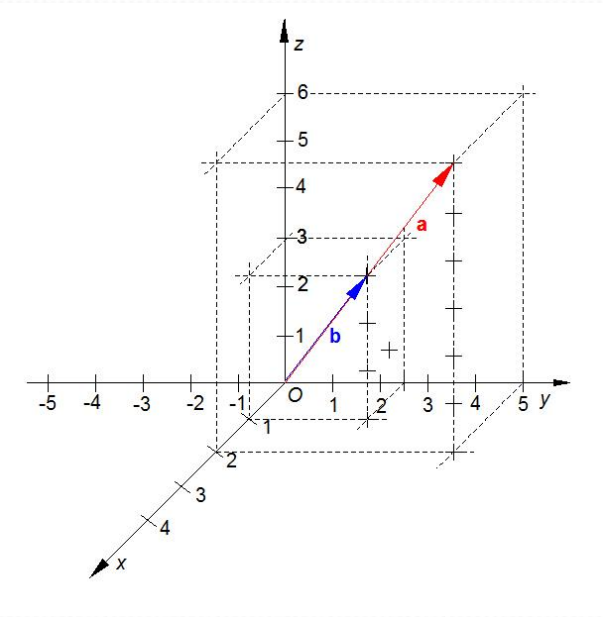
Určete souřadnice vektoru $\mathbf{e} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$, kde $\mathbf{c} = (4, 5, -9)$ a $\mathbf{d} = (1, -8, 3)$.

$$\mathbf{e} = \mathbf{c} - \mathbf{d} = (4, 5, -9) - (1, -8, 3) = (4 - 1, 5 - (-8), -9 - 3) = (3, 13, -12)$$

Příklad 2.6:

Určete souřadnice vektoru **b** = α . **a,** kde **a** = (2, 5, 6) a α = ½. Do obrázku načrtněte oba vektory **a** a **b**.

b = α . **a** = ½ . (2, 5, 6) = (1, 5/2, 3)



Příklad 2.7:

Jsou dány vektory **a** = (4, -1, 3), **b** = (0, 2, -5) a **c** = (1, 0, -1). Najděte souřadnice vektoru **x**, tak že platí **x = 2a – 3b + c.**

x = **2a – 3b + c** = 2 . (4, -1, 3) - 3 . (0, 2, -5) + (1, 0, -1) =

= (8, -2, 6) + (0, -6, 15) + (1, 0, -1) = (8 + 0 +1, -2 + (-6) + 0, 6 + 15 + (-1)) =

= (9, -8, 20)

Příklad 2.8:

Jsou dány vektory **a** = (0, -1, 5), **b** = (-1, 3, -2) a **c** = (2, 1, -2). Najděte souřadnice vektoru **d**, tak že platí **d** = 5 . (**a** + **b** – **c**) + 3 . (**c** + **b**) - 2 . (**a** – **c**).

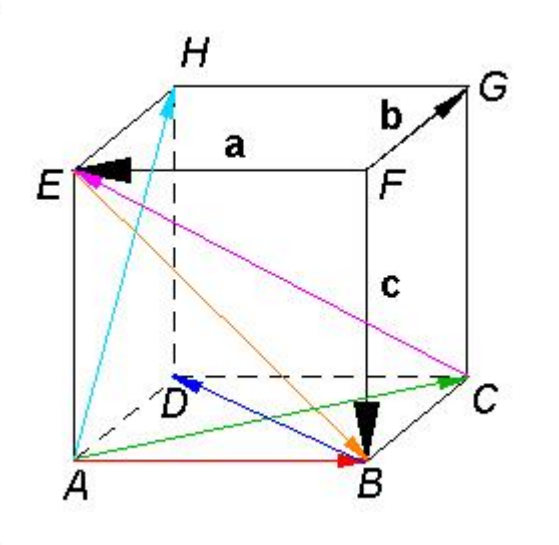
d = 5 . (**a** + **b** – **c**) + 3 . (**c** + **b**) - 2 . (**a** – **c**) = 5**a** + 5**b** – 5**c** + 3**c** + 3**b** – 2**a** + 2**c** =

= 3**a** + 8**b** + 0**c** = 3 . (0, -1, 5) + 8 . (-1, 3, -2) + 0 . (2, 1, -2) =

= (0, -3, 15) + (-8, 24, -16) = (0 + (-8), -3 + 24, 15 + (-16)) = (-8, 21, -1)

Příklad 2.9:

Na vybraných hranách krychle (viz obrázek) jsou dány vektory **a, b** a **c**. Napište vektory **AB, EB, AC, AH, BD, CE** jako lineární kombinace vektorů **a, b, c**.



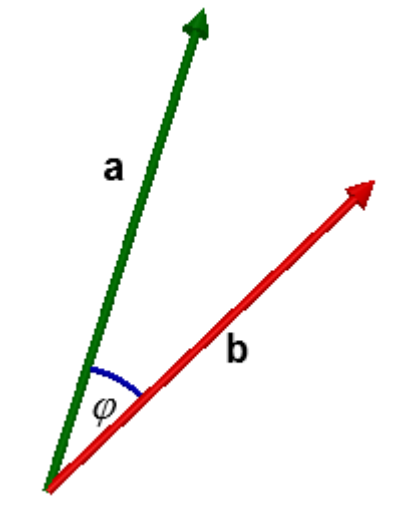
AB = – **a**
EB = – **a** + **c**
AC = – **a** + **b**
AH = – **c** + **b**
BD = **a** + **b**
CE = – **b** – **c** + **a**

2.7 Skalární součin

Skalárním součinem dvou vektorů **a, b** nazveme reálné číslo

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \varphi,$$

kde |a|, |b| jsou velikosti vektorů **a, b** a φ je velikost úhlu, který tyto dva vektory svírají. Pro úhel φ platí, že $0° \leq \varphi \leq 180°$.



Jsou-li vektory **a, b** určeny souřadnicemi, tj. je-li $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, pak je skalární součin vektorů **a, b** definován následovně

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Z definice skalárního součinu lze dokázat platnost následujících vlastností:

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

c) $(\alpha\, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\, \mathbf{b}) = \alpha\, (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, tj. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$

e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ právě když – buď vektor **a**, anebo vektor **b** je nulový vektor
– oba vektory **a** i **b** jsou nenulové a jsou na sebe navzájem **kolmé**

Úhel mezi vektory **a** a **b** můžeme vypočítat ze vztahu

$$\cos \varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

Příklad 2.10:

Vypočtěte skalární součin **a** · **b** vektorů **a** = (0, -2, 3) a **b** = (-9, -1, 4).

a · **b** = (0, -2, 3) · (-9, -1, 4) = 0 · (-9) + (-2) · (-1) + 3 · 4 = 0 + 2 + 12 = 14

Příklad 2.11:

Rozhodněte, zda jsou dané vektory **a** = (1, 1, -2) a **b** = (-4, 2, -1) na sebe navzájem kolmé.

a · **b** = (1, 1, -2) · (- 4, 2, -1) = 1 · (-4) + 1 · 2 + (-2) · (-1) = - 4 + 2 + 2 = 0

$\Rightarrow$ skalární součin vektorů **a, b** je roven nule, tzn. vektory **a, b** jsou na sebe kolmé

Příklad 2.12:

K danému vektoru **a** = (-1, 3, 5) najděte alespoň jeden kolmý vektor **b** = (*x*, 2, 3).

a · **b** = (-1, 3, 5) · (*x*, 2, 3) = -*x* + 3 · 2 + 5 · 3 = - *x* + 6 + 15 = - *x* + 21 = 0

x = 21

Jedním kolmým vektorem k vektoru **a** je vektor **b** = (21, 2, 3).

Příklad 2.13:

Vypočtěte velikost vektoru **a** = (-1, 3, 5).

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$$

Příklad 2.14:

K danému vektoru **a** = (-1, 3, 5) najděte příslušný jednotkový vektor **u**.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$$

$$\mathbf{u} = \left(\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}\right) = \left(\frac{-\sqrt{35}}{35}, \frac{3\sqrt{35}}{35}, \frac{5\sqrt{35}}{35}\right)$$

Příklad 2.15:

Spočtěte úhel, který svírají vektory **a** = (-3, 5, 4) a **b** = (-2, 2, 0).

$$\cos\varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{-3\cdot(-2) + 5\cdot 2 + 4\cdot 0}{\sqrt{(-3)^2 + 5^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2}} =$$

$$= \frac{6+10+0}{\sqrt{9+25+16} \cdot \sqrt{4+4+0}} = \frac{16}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{8}} = \frac{16}{5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{16}{10\sqrt{4}} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

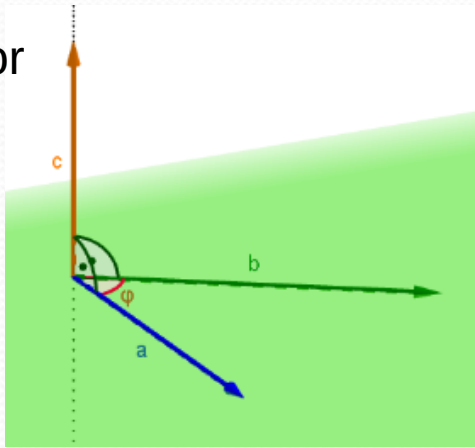
$$\cos\varphi = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\frac{4}{5} = 36{,}87^\circ$$

2.8 Vektorový součin

Vektorovým součinem dvou vektorů **a, b** nazveme vektor

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

který je kolmý na oba vektory **a, b** a který je orientovaný tak, aby vektory **a, b**, **c** tvořily pravotočivý systém.



Pro velikost vektoru $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ platí vztah

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi,$$

kde φ je úhel, který svírají vektory **a, b**.

Jsou-li vektory **a, b**, **c** vyjádřeny v kartézských souřadnicích, tj. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, pak pro souřadnice vektoru $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ platí, že

$$c_1 = a_2b_3 - a_3b_2,$$
$$c_2 = a_3b_1 - a_1b_3,$$
$$c_3 = a_1b_2 - a_2b_1,$$

a tedy

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2) \cdot \mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3) \cdot \mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1) \cdot \mathbf{k}.$$

Výsledný vektor vektorového součinu můžeme také symbolicky zapsat ve tvaru determinantu

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Pro vektorový součin platí následující vlastnosti:

a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ (vzhledem ke smyslu otáčení)

b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

d) $(\alpha\, \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\, \mathbf{b}) = \alpha\, (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

e) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ právě když – buď vektor **a**, anebo vektor **b** je nulový vektor

– oba vektory **a** i **b** jsou nenulové a jsou navzájem rovnoběžné

f) $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$

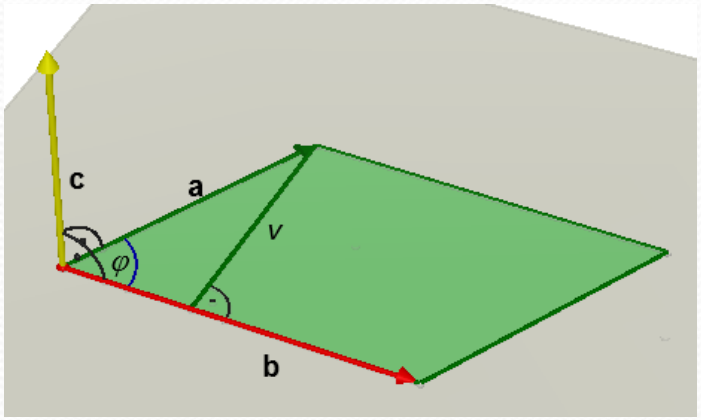
g) Velikost vektorového součinu se rovná ploše rovnoběžníku, jehož strany jsou určeny vektory **a, b.**

Výška rovnoběžníku je

$$v = |\mathbf{a}| \cdot \sin \varphi$$

a jeho plocha je

$$S = |\mathbf{b}| \cdot v = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi = |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$



Příklad 2.16:

Vypočtěte vektorový součin **a** × **b** vektorů **a** = (3, -1, 5) a **b** = (4, 2, -1).

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} \cdot \left((-1) \cdot (-1) - 5 \cdot 2 \right) - \mathbf{j} \cdot \left(3 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 \right) + \mathbf{k} \cdot \left(3 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 \right) = \mathbf{i} \cdot (-9) - \mathbf{j} \cdot (-23) + \mathbf{k} \cdot 10 =$$

$$= (-9, 23, 10)$$

Příklad 2.17:

Vypočtěte plošný obsah rovnoběžníku *ABCD*, jehož strana *AB* je tvořena vektorem **a** = (3, 0, -1) a strana *AD* vektorem **b** = (-2, 2, 1).

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} \cdot \left(0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \right) - \mathbf{j} \cdot \left(3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) \right) + \mathbf{k} \cdot \left(3 \cdot 2 - 0 \cdot (-2) \right) = \mathbf{i} \cdot 2 - \mathbf{j} \cdot 1 + \mathbf{k} \cdot 6 =$$

$$= (2, -1, 6)$$

$$S = |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 1 + 36} = \sqrt{41}$$

Obecná rovnice roviny

Dosadíme-li do normálového tvaru rovnice roviny souřadnice bodů $M = [x_M, y_M, z_M]$, $X = [x, y, z]$ a souřadnice normálového vektoru $\mathbf{n} = (a, b, c)$, pak dostáváme

$$\mathbf{MX} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$(X - M) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$(x - x_M,\ y - y_M,\ z - z_M) \cdot (a, b, c) = 0,$$

$$ax + by + cz - (ax_M + by_M + cz_M) = 0.$$

Označíme-li $d = -(ax_M + by_M + cz_M)$, získáváme obvyklý tvar obecné rovnice roviny, tj.

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Nezapomeňme připomenout, že musí platit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Úsekový tvar rovnice roviny

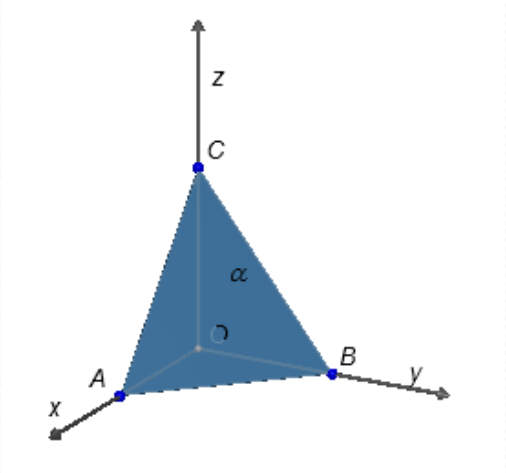
Je-li $d \neq 0$, tj. neprochází-li rovina počátkem soustavy souřadnic, pak ji lze určit pomocí úseků, které vytíná na souřadnicových osách (této skutečnosti jsme použili při konstrukci stop roviny v Mongeově promítání).

Úsekový tvar rovnice roviny odvodíme z obecného tvaru rovnice roviny. Dle stanoveného předpokladu je $d \neq 0$, proto můžeme obecný tvar rovnice roviny vydělit číslem d. Potom píšeme

$$ax + by + cz + d = 0,$$

$$\frac{a}{d} \cdot x + \frac{b}{d} \cdot y + \frac{c}{d} \cdot z + 1 = 0,$$

$$\frac{x}{\frac{d}{a}} + \frac{y}{\frac{d}{b}} + \frac{z}{\frac{d}{c}} = -1.$$



Je-li dále $a \cdot b \cdot c \neq 0$, můžeme psát

$$A = -\frac{d}{a}, B = -\frac{d}{b}, C = -\frac{d}{c}.$$

Poté následným dosazením dostáváme rovnici roviny v úsekovém tvaru

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1,$$

v níž čísla A, B, C určují úseky, v nichž rovina protíná souřadnicové osy.

Je-li některé číslo z trojice *a, b, c* rovno nule, pak je rovina rovnoběžná s příslušnou souřadnicovou osou. Např. je-li $b = 0$ a současně $a \cdot c \neq 0$, je daná rovina rovnoběžná s osou *y* a její úsekový tvar rovnice je

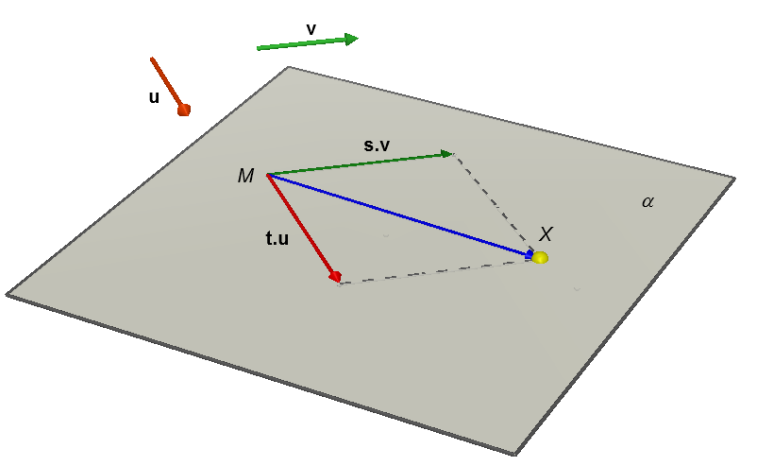
$$\frac{x}{A} + \frac{z}{C} = 1.$$

Vektorová rovnice roviny

Nechť je dána rovina, která prochází bodem $M = [x_M, y_M, z_M]$ a která je rovnoběžná se dvěma lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Pak libovolný bod $X = [x, y, z]$ roviny vytvoří s bodem *M* vektor **MX**, který je lineární kombinací vektorů **u, v.** Můžeme tedy psát, že

$$\mathbf{MX} = X - M = t \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v},$$

kde *t, s* jsou reálná čísla. Uvedená rovnice je vektorovou rovnicí roviny.



Parametrické rovnice roviny

Vyjádříme-li z vektorové rovnice roviny bod X, pak platí, že

$$X = M + t\,\mathbf{u} + s\,\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$

Dosazením souřadnic vektorů **u, v** a také souřadnic bodu M dostáváme, že pro souřadnice libovolného bodu X roviny platí

$$x = x_M + t\,u_1 + s\,v_1, \quad t, s \in \mathbf{R}.$$
$$y = y_M + t\,u_2 + s\,v_2$$
$$z = z_M + t\,u_3 + s\,v_3$$

Poznámka: Vyloučením reálných parametrů t, s z parametrického vyjádření roviny dostaneme obecný tvar rovnice roviny.

Příklad 2.18:

Rovina α je dána třemi nekolineárními body $A = [2, 1, 2]$, $B = [3, 2, 1]$ a $C = [-5, 1, -3]$. Zapište normálový, obecný, úsekový, vektorový a parametrický tvar její rovnice.

$\mathbf{AB} = B - A = (3 - 2, 2 - 1, 1 - 2) = (1, 1, -1)$
$\mathbf{AC} = C - A = (-5 - 2, 1 - 1, -3 - 2) = (-7, 0, -5)$

$$\mathbf{n}^{\alpha} = \mathbf{AB} \times \mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & -5 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} \cdot (1 \cdot (-5) - (-1) \cdot 0) - \mathbf{j} \cdot (1 \cdot (-5) - (-1) \cdot (-7)) + \mathbf{k} \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot (-7)) = \mathbf{i} \cdot (-5) - \mathbf{j} \cdot (-12) + \mathbf{k} \cdot 7 =$$

$$= (-5, 12, 7)$$

$$\mathbf{AX} \cdot \mathbf{n}^{\alpha} = 0$$

$$(X - A) \cdot \mathbf{n}^{\alpha} = 0$$

$$(x-2, y-1, z-2) \cdot (-5, 12, 7) = 0 \quad \ldots \text{normálový tvar rovnice roviny}$$

$$-5 \cdot (x-2) + 12 \cdot (y-1) + 7 \cdot (z-2) = 0$$

$$-5x + 10 + 12y - 12 + 7z - 14 = 0$$

$$-5x + 12y + 7z - 16 = 0 \qquad / \cdot \tfrac{1}{16} \quad \ldots \text{obecná rovnice roviny}$$

$$-\tfrac{5}{16}x + \tfrac{12}{16}y + \tfrac{7}{16}z - 1 = 0$$

$$\frac{x}{-\frac{16}{5}} + \frac{y}{\frac{4}{3}} + \frac{z}{\frac{16}{7}} = 1 \quad \ldots \text{úsekový tvar rovnice roviny}$$

$$\mathbf{AX} = t \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}, \quad t, r \in \mathbf{R}$$

$$X - A = t \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}$$

$$(x-2, y-1, z-2) = t \cdot (1, 1, -1) + r \cdot (-7, 0, -5) \quad \ldots \text{vektorový tvar rovnice roviny}$$

$$X = A + t \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{v}, \quad t, r \in \mathbf{R}$$

$$x = 2 + t - 7r$$

$$y = 1 + t$$

$$z = 2 - t - 5r, t, r \in \mathbf{R} \quad \ldots \text{parametrický tvar rovnice roviny}$$

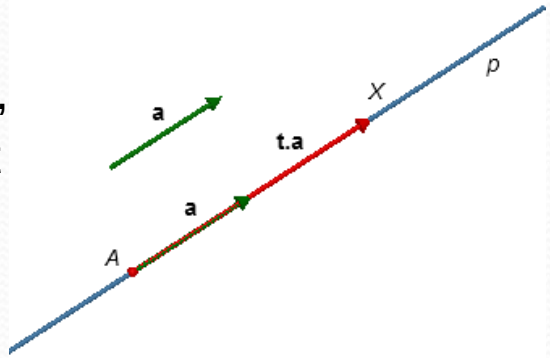
Rovnice přímky

Vektorová rovnice přímky

Uvažujme přímku p procházející bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ rovnoběžně s nenulovým vektorem $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Vektor **a** nazýváme **směrovým vektorem** přímky p. Libovolný bod $X = [x, y, z]$ ležící na přímce p určí společně s bodem A vektor **AX**, který musí být násobkem vektoru **a**. Proto můžeme psát

$$\mathbf{AX} = t \cdot \mathbf{a},$$

kde t je reálné číslo, tzv. parametr bodu X.



Parametrické vyjádření přímky

Přepíšeme-li vektorovou rovnici přímky pomocí bodů A, X, dostáváme

$$X - A = t \cdot \mathbf{a}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

$$X = A + t \cdot \mathbf{a}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Dosazením souřadnic bodů A, X a vektoru **a** do uvedené rovnice dostaneme trojici tzv. parametrických rovnic přímky

$$x = x_A + t \cdot a_1, \; t \in \mathbf{R}$$

$$y = y_A + t \cdot a_2$$

$$z = z_A + t \cdot a_3.$$

Poznámka: Různé body přímky p jsou od sebe odlišeny jinou hodnotou parametru $t \in \mathbf{R}$.

Poznámka: Směrový vektor přímky p není určen jednoznačně. Je-li vektor $\mathbf{a}$ směrovým vektorem přímky, pak je jím i vektor $\mathbf{s} = k \cdot \mathbf{a}$, kde $k \neq 0$ a $k \in \mathbf{R}$.

Kanonický tvar rovnice přímky

Jsou-li všechny tři souřadnice směrového vektoru přímky nenulová čísla, můžeme z trojice parametrických rovnic přímky vyjádřit parametr $t \in \mathbf{R}$, čímž získáme kanonický tvar rovnice přímky

$$t = \frac{x - x_A}{a_1} = \frac{y - y_A}{a_2} = \frac{z - z_A}{a_3}.$$

Poznámka: Tento systém rovnic je ekvivalentní parametrickým rovnicím přímky.

Přímka jako průsečnice rovin

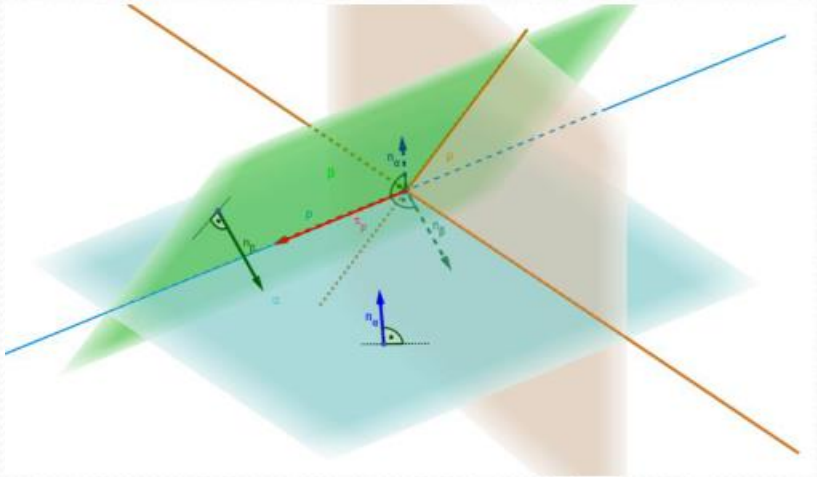
Přímka p může být také určena jako průsečnice dvou rovin α, β. Potom její rovnice je určena soustavou obecných rovnic rovin α, β, tj.

$$\alpha: \; a^{\alpha} x + b^{\alpha} y + c^{\alpha} z + d = 0,$$

$$\beta: \; a^{\beta} x + b^{\beta} y + c^{\beta} z + d = 0.$$

Uvedená soustava dvou rovnic pro tři neznámé má nekonečně mnoho řešení (ale jen v případě, že roviny nejsou rovnoběžné). Řešení soustavy rovnic závisí na jednom parametru. Odtud pak dostáváme parametrické vyjádření přímky.

Poznámka: Směrový vektor **a** přímky p je kolmý na normálové vektory rovin α, β, proto může být určen jako jejich vektorový součin $\mathbf{a} = \mathbf{n}^{\alpha} \times \mathbf{n}^{\beta} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$.



Příklad 2.19:

Přímka p je dána svými dvěma body $A = [1, -2, -1]$ a $B = [4, -3, 2]$. Napište vektorový, parametrický a kanonický tvar její rovnice.

$$\mathbf{a} = \mathbf{AB} = B - A = (4-1, -3-(-2), 2-(-1)) = (3, -1, 3)$$

$$\mathbf{AX} = t \cdot \mathbf{a}, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$X - A = t \cdot \mathbf{a}$$

$$(x-1, y+2, z+1) = t \cdot (3, -1, 3), \quad t \in \mathbf{R} \quad \ldots \text{vektorový tvar}$$

$$X = A + t \cdot \mathbf{a}, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$x = 1 + 3t$$

$$y = -2 - t$$

$$z = -1 + 3t, \quad t \in \mathbf{R} \quad \ldots \text{parametrický tvar}$$

$$t = \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{3}, \quad t \in \mathbf{R} \quad \ldots \text{kanonický tvar}$$