3. Hodina – MA1-E

1) Množiny

1. Utvořte všechny podmnožiny množiny M = {3, -4, 5}.
2. Stanovte, kolik podmnožin má množina A = {O, 1, 2, 3}, zobecněte pro případ, kdy množina A má n prvků.
3. Jsou dány množiny A = {1, 2, 4, 7, 11, 16}, B = {1, 3, 7, 13}, C = {1, 6, 11, 19}. Určete a) $A \cup B$, b) $B \cup C$, c) $A \cup B \cup C$, d) $A \cap B$ e) $A \cap C$, f) $A \cap B \cap C$, g) A - B.
4. Uvažte, zda a) množina úhlů v trojúhelníku je podmnožinou množiny trojúhelníků, b) množina prvočísel je podmnožinou množiny lichých čísel, c) množina lichých čísel je podmnožinou množiny prvočísel, d) množina rovnostranných trojúhelníků je podmnožinou množiny rovnoramenných trojúhelníků.
5. Je možné, aby někdy platilo a) A - B = A, b) A - B = $\varnothing$?
6. Určete prvky množin A, B, C, které jsou definovány ve tvaru $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : (x - 1)^2 = 0\}$, $C = \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 2x^2 - x = -2\}$.
7. Najděte množinu, kterou tvoří všechna řešení rovnice a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$, b) $\sin \pi x = 0$.
8. Základní množina je Z = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} a množiny A = {1, 3, 5, 7}, B = {2, 4, 6, 8}, C = {3, 4, 7, 8}. Určete a) $A \cup B'$, b) $A' \cap B$, c) $B' \cap C$.

1. Který ze vztahů platí pro množiny **Z** celých a **R** racionálních čísel:

   a) $\mathbf{Z} = \mathbf{R}$, b) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$, c) $\mathbf{R} \subset \mathbf{Z}$.
2. Existují celá čísla, která jsou nekladná i nezáporná, která to jsou:

   a) všechna, b) neexistují, c) ano, 0.
3. Kolik různých racionálních čísel je zapsáno: $\frac{18}{8}$; $2\frac{2}{8}$; $2,25$; $\frac{9}{4}$; $\frac{126}{56}$; $\frac{-72}{-32}$; $2+\frac{1}{4}$:

   a) 0, b) 1, c) 2.
4. Pro který interval platí $\forall x \in \mathbf{R} : a \le x < b$:

   a) polootevřený $(a, b>$, b) uzavřený $<a, b>$, c) polozavřený $<a, b)$.
5. Patří vztah $|ab| = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi$ mezi vlastnostmi absolutní hodnoty reálných čísel a, b:

   a) ano, b) ne, c) ano, je-li $\varphi = \frac{\pi}{4}$.
6. Pro infimum číselné množiny M platí jedna z vlastností:

   a) $\forall x \in M$ platí $x \ge \inf M$, b) $\forall x \in M$ platí $x < \inf M$, c) $\exists x \in M$, tak, že platí $x < \inf M$.

2) Maximum, Minimum, Supremum, Infimum

Definice 1.17.

Platí-li $M \le a$, $a \in \mathbb{R}$, řekneme, že a je ***horní mez*** (závora, ohraničení) ***množiny*** M a že množina M je ***shora ohraničená***,

platí-li $a \le M$, $a \in \mathbb{R}$, řekneme, že a je ***dolní mez*** (závora, ohraničení) ***množiny*** M a že množina M je ***zdola ohraničená***,

řekneme, že $a \in \mathbb{R}$ je ***největší prvek množiny*** M a píšeme $a = \max M$, jestliže platí $M \le a \ \wedge a \in M$,

řekneme, že $a \in \mathbb{R}$ je ***nejmenší prvek množiny*** M a píšeme $a = \min M$, jestliže platí $a \le M \ \wedge a \in M$.

Příklad 1.18. $\min(-2, 3\rangle$ neex., $\max(-2,3\rangle = 3$; $\max \mathbb{N}$ neex., $\min \mathbb{N} = 1$.

Definice 1.19. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

Nejmenší horní mez množiny M nazýváme ***suprémum množiny*** M. Není-li množina M shora ohraničená, považujeme za její suprémum ∞. Píšeme

$$\sup M = \min\{x \,|\, x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge M \le x\}.$$

Největší dolní mez množiny M nazýváme ***infimum množiny*** M. Není-li množina M zdola ohraničená, považujeme za její infimum $-\infty$. Píšeme

$$\inf M = \max\{x \,|\, x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x \le M\}.$$

Příklad 1.20. $\inf(-2,3\rangle = \max\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \le (-2,3\rangle\} = \max\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \le -2\} = -2$,

$\sup(-2,3\rangle = \min\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \ge (-2,3\rangle\} = \min\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \ge 3\} = 3$.

Hlavní rozdíl mezi Supremem a Maximem: Maximum je největší prvek množiny, který do ní patří, Supremum je horní závora množiny, která ale do ní nemusí nutně patřit. Shora omezená množina má vždy Supremum, ale nemusí mít Maximum. (podobně Infimum a minimum).

1)

Určete maximum, minimum, supremum a infimum následujících množin:

$A_1 = (-7, 2\rangle$

$A_2 = \langle -3, 1\rangle \cup \langle 4,\ 5)$

$A_3 = \langle 0, 1\rangle \cup \langle 4,\ \infty)$

$A_4 = \langle -3, 1\rangle \cup \langle 4,\ 8\rangle$

2)

Najděte suprémum a infimum množiny

a) $M_1 = \left\{x \,|\, x = \frac{2n+1}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$,

b) $M_2 = \left\{x \,|\, x = \frac{2+(-1)^n}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$,

c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |3x - 1| < x < |3x + 1|\}$.

3)

Určete, zda existuje minimum množiny $M = \left\{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbf{N}\right\}$: $\frac{5}{9}$.

a) existuje, b) neexistuje, c) nelze určit.

3. Kterým reálným číslům vyhovují následující výrazy ? Zapište pomocí intervalů!

a) $\sqrt{\frac{1}{x-1}}$, b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x}$, c) $\frac{3}{4-x^2}$.

4. Najděte maximum, minimum, supremum, infimum množin (pokud existují):

a) (0, 1),

b) < 0, 1>,

c) množina všech záporných čísel.

3) Zobrazení

Definice 1.24. ***Zobrazení*** f množiny D do množiny M je předpis, který každému prvku $x \in D$ přiřadí právě jeden prvek $y \in M$. Prvek y se nazývá ***hodnota*** zobrazení f v x, nebo také ***obraz*** x a značí se $f(x)$.

Skutečnost, že f je zobrazení množiny D do množiny M zapisujeme vztahem

$$f : D \to M, \quad x \mapsto f(x).$$

Množina D se nazývá ***definiční obor*** zobrazení f, množina $f(D) = \{f(x)|x \in D\}$ se nazývá ***obor hodnot*** zobrazení f a značí se symbolem H_f.

Zobrazení prosté:

$\boldsymbol{x \neq y, \mathrm{f}(x) \neq f(y)}$

Funkce f se nazývá ***prostá***, jestliže platí:

$$\forall x_1, x_2 \in D : \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Zobrazení na:

$\boldsymbol{f: A \to B}$ **a** $\boldsymbol{H_f = B}$

1. Nechť $A = \{-1,\ 2,\ 5\}$, $\mathrm{B} = \{0,\ 3\}$

a) Sestrojte všechna zobrazení z množiny A do B

b) Všechna zobrazení z množiny B do A

2. Která zobrazení z 1a) jsou prostá a která jsou na množinu B?

3. Která zobrazení z 1b) jsou prostá a která jsou na množinu A?

4.

- Je následující zobrazení prosté?

x	-11	-10	-9	-8	-7	-6	0	2	3	4
f(x)	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0

- Je následující zobrazení prosté?

x	-20	-17	-14	-13	-2	8	9	10	11	12
f(x)	12	11	13	8	9	4	2	4	11	0

Existují k předchozím zobrazením inverzní zobrazení?

(Důležité typy zobrazení)

Zobrazení $f : A \to B$ je

- **prosté** (**injektivní**), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na** (**surjektivní**), jestliže $f(A) = B$, to jest pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (**bijektivní**), jestliže f je prosté a na.

4) Definiční obory

Určete definiční obor funkce $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$.

Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{\dfrac{x+10}{x^2+2}}$.

Určete definiční obor funkce $y = \log(3x-5)$.

Určete definiční obor funkce:

a) $y = \ln\dfrac{2-x}{2+x}$, b) $y = \ln\ln x$, c) $y = \sqrt[4]{\dfrac{9-x^2}{2+x}}$,

d) $y = \operatorname{cotg} 3x$, e) $y = 2^{\frac{2+x}{3-x}}$, f) $y = \ln(x^2-2x)$.