5. Hodina – MA1-E

1) Inverzní funkce

Rozhodněte, ke kterým z daných funkcí existují funkce inverzní v definičním oboru, a svoje tvrzení zdůvodněte.

a) $y = 2x - 1$ c) $y = 3^x$ e) $y = |x|$
b) $y = x^2 - 2x$ d) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ f) $y = \sqrt{x}$

2) Sudost a lichost funkce

Funkce *f* se nazývá **sudá,** právě když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.
2. Pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y.

Funkce *f* se nazývá **lichá**, právě když zároveň platí:

1. Pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.
2. Pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = -f(x)$.

Graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic Oxy.

Není-li splněna ani jedna z uvedených podmínek, není funkce ani sudá ani lichá.

Rozhodněte, zda je funkce sudá či lichá: $y = 3x^2 - \dfrac{x^4 - 5}{x^2}$.

Sudá, lichá funkce

Které z funkcí h_1 až h_{12} jsou sudé (liché) v definičním oboru?

$h_1\colon y = x$ $h_4\colon y = 4x$ $h_7\colon y = |x|$ $h_{10}\colon y = x^3$
$h_2\colon y = \cos x$ $h_5\colon y = x^2$ $h_8\colon y = \log x$ $h_{11}\colon y = 2^x$
$h_3\colon y = \dfrac{1}{x}$ $h_6\colon y = \dfrac{4x}{x^2 - 4}$ $h_9\colon y = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$ $h_{12}\colon y = \dfrac{x^2}{|x| + 3}$

3) Elementární funkce

Goniometrické funkce

Sinus α je poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu α a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Kosinus α je poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu α a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku.

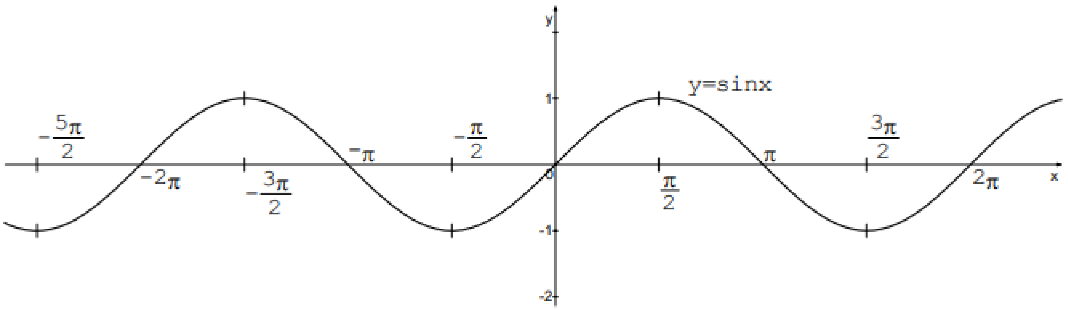
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

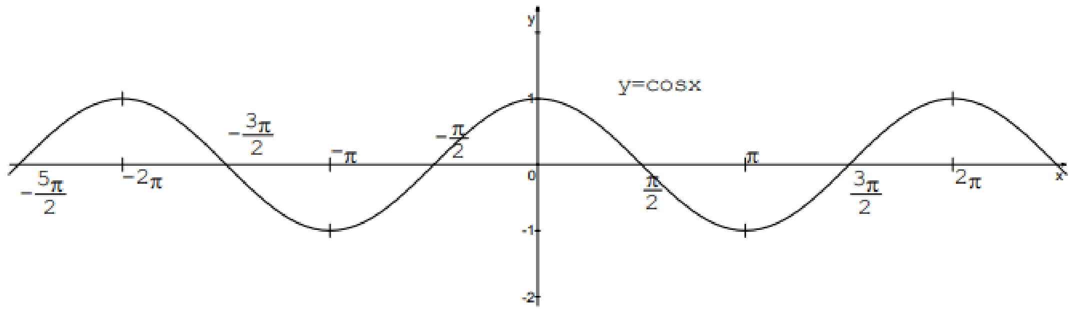
Tangens α je poměr délek odvěsny protilehlé k úhlu α a odvěsny přilehlé k úhlu α pravoúhlého trojúhelníku.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Kotangens α je poměr délek odvěsny přilehlé k úhlu α a odvěsny protilehlé k úhlu α pravoúhlého trojúhelníku

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$





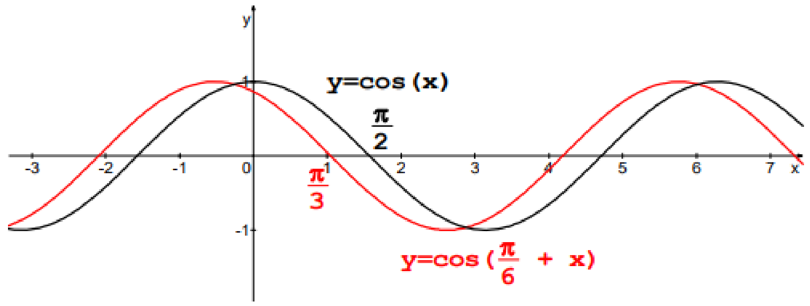
Určete hodnoty goniometrických funkcí $f(x)$ pro $x = \frac{5}{6}\pi$.

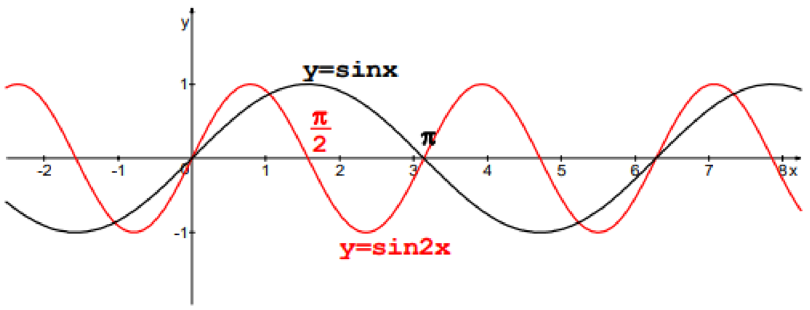
Nakreslete graf funkce $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$.

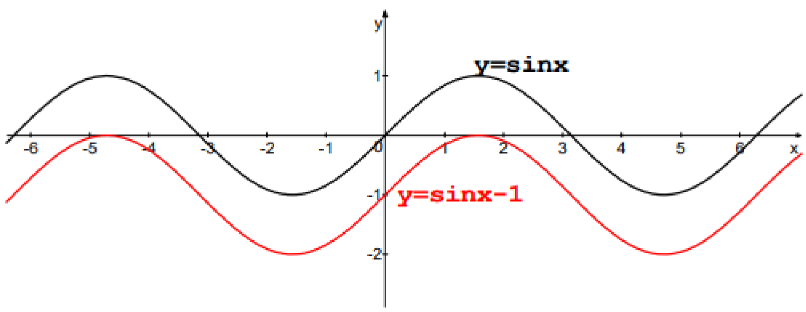
Nakreslete graf funkce $y = \sin 2x$.

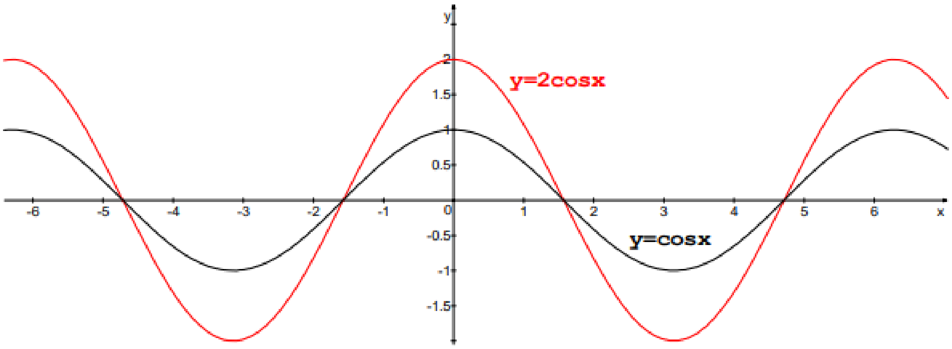
Nakreslete graf funkce $y = \sin x - 1$.

Nakreslete graf funkce $y = 2\cos x$.









y
x
y=2cosx
y=cosx
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

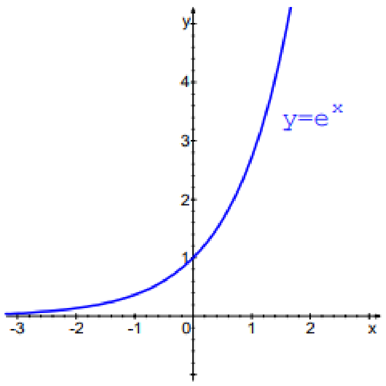
Exponenciální fce:

Příklad 2.9.1. Nakreslete graf exponenciální funkce:

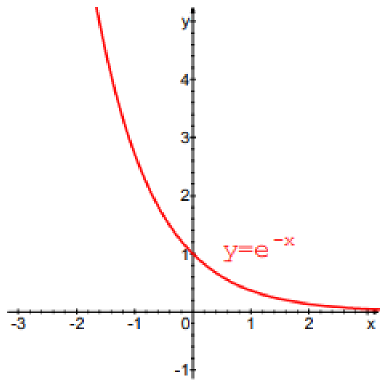
a) $y = e^x$, b) $y = e^{-x}$, c) $y = 3e^x$,

d) $y = e^{x+2}$, e) $y = e^x - 1$, f) $y = e^{-x} - 1$.

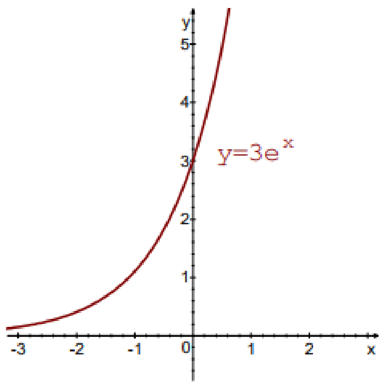
a)



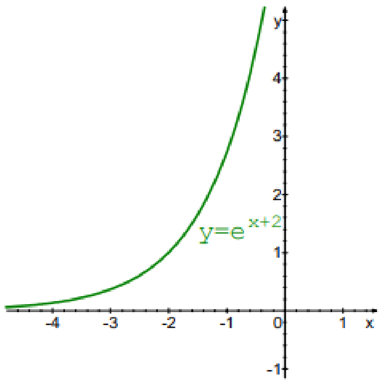
b)



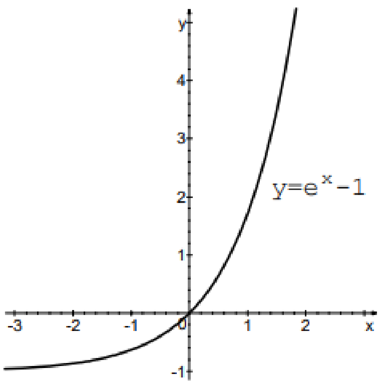
c)



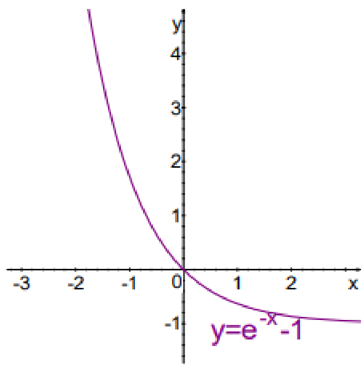
d)



e)



f)



Logaritmická fce:

Logaritmická funkce o základu a je funkce inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$, kde *a* je libovolné kladné číslo různé od jedné, $a \in \mathrm{R}^+ - \{1\}$ a $x \in R$ resp. $D(f) = R$.

Logaritmus čísla *x* při základu *a* je takové číslo y, pro které platí $a^y = x$, tedy

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$$

Pravidla pro počítání s logaritmy:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^n = n.\log_a x,$$

$$\log_a a = 1, \qquad \log 10 = 1, \qquad \ln e = 1,$$

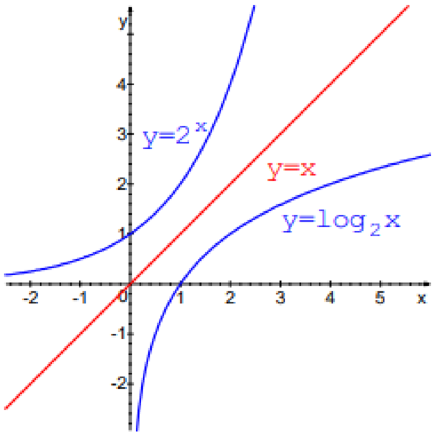
$$\log_a 1 = 0, \qquad \log 1 = 0, \qquad \ln 1 = 0.$$

Nakreslete graf funkce:

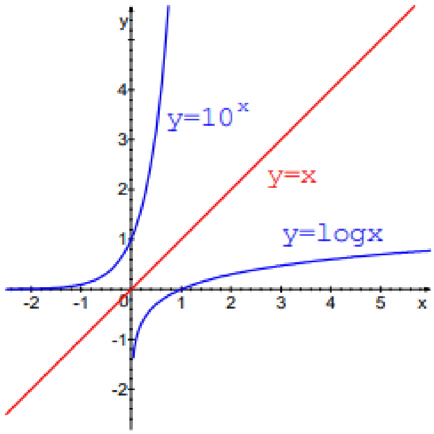
a) $y = \log_2 x$, b) $y = \log x$, c) $y = \ln x$,

d) $y = \log_{1/2} x$, e) $y = \log_{0,1} x$.

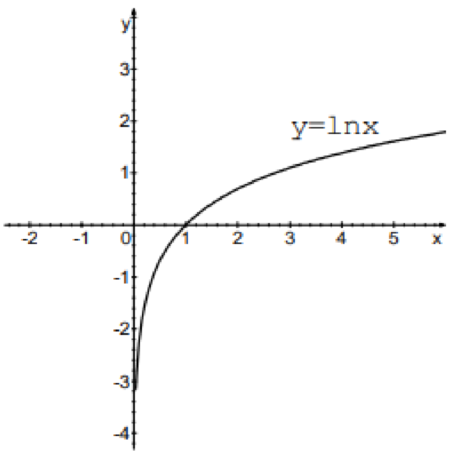
a)



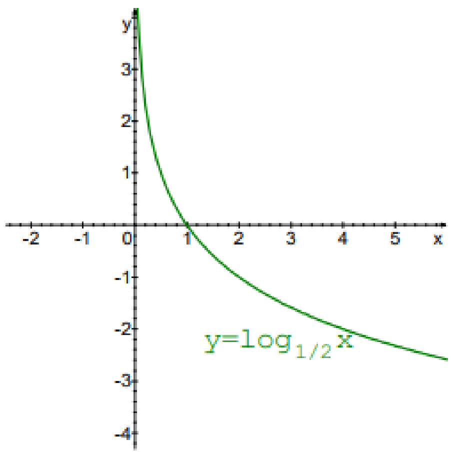
b)



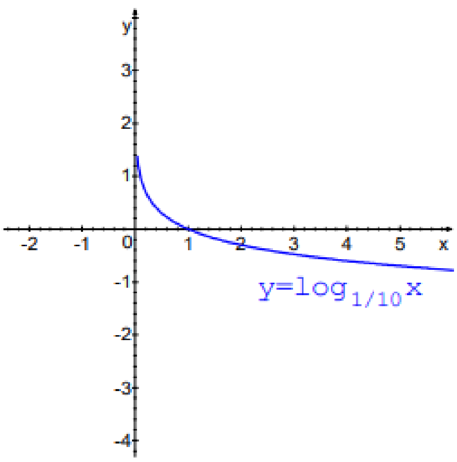
c)



d)



e)



Další příklady

1. Rozhodněte, zda je funkce sudá či lichá:

a) $y = 3x^3 - \dfrac{x^4 + 2x - 5}{x - 2}$, b) $y = -\dfrac{x - 5x^3}{x^2}$, c) $y = x(\cos x - x \sin x)$,

d) $y = x \ln 2^x$, e) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, f) $y = x(x^3 - x^2 \sin x)$,

g) $y = x^2 + 2x - 5$.