6. Hodina – MA1-E

Pozn.: za 14 dní 1. zápočtový test

Posloupnosti a limita

Funkce, jejímž definičním oborem je množina **N** všech přirozených čísel, se nazývá **posloupnost (nekonečná číselná posloupnost).**

Příklady posloupností:

1. Čísla 2, 4, 6, 8, 10, 12, … jsou prvními členy posloupnosti sudých kladných čísel. Tato posloupnost vznikne tak, že každému přirozenému číslu n přiřadíme jeho dvojnásobek $2n$. Libovolný člen $a_n = 2n$. Zapisujeme ji $\{2n\}$.
2. Čísla $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ jsou prvními členy posloupnosti převrácených čísel k přirozeným číslům. Dostaneme ji přiřazováním převrácené hodnoty $\frac{1}{n}$ ke každému přirozenému číslu, takže její libovolný člen $a_n = \frac{1}{n}$.
3. Čísla 4, 7, 10, 13, 16, … jsou prvními členy posloupnosti, ve které je každému přirozenému číslu n přiřazeno číslo $1+3n$ a zapisujeme ji $\{1+3n\}$.

Příklad 5.1.5. Zjistěte, zda posloupnost, ve které pro libovolný člen platí $a_n = \frac{n(n-1)}{n+1}$, je ryze monotónní.

Příklad 5.1.6. Zjistěte, zda je posloupnost $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ ohraničená.

Příklad 5.1.7. Napište prvních pět členů posloupnosti, která je dána rekurentně:

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$.

Příklad 5.2.1. Určete prvních pět členů aritmetické posloupnosti, je-li dán sedmý člen $a_7 = 10$ a šestý člen $a_6 = 8$.

V aritmetické posloupnosti je dáno $a_4 = 18,\ a_7 = 16$, určete a_1, d, a_{10}.

Vypočtěte součet prvních n přirozených lichých čísel.

Geometrická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy
$a_1 = a,\ \ a_{n+1} = a_n q,\ \forall n \in \boldsymbol{N}$, kde a, q jsou daná čísla.
Číslo q se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti**. Budeme předpokládat, že je $a \neq 0 \wedge q \neq 0.$ V takovém případě je každé $a_n \neq 0$ a z rekurentního vztahu plyne pro kvocient (latinský název pro podíl), že $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Uveďme si na ukázku prvních pět členů geometrické posloupnosti, je-li dán její první člen a kvocient .

a) $a_1 = 1, q = 3$ — 1; 3; 9; 27; 81;...

b) $a_1 = 2, q = 1{,}5$ — 2; 3; 4,5; 6,75; 10,125; ...

c) $a_1 = 10, q = \dfrac{1}{2}$ — 10; 5; 2,5; 1,25; 0,625; ...

d) $a_1 = 2, q = -3$ — $2; -6; 18; -54; 162;$ ...

Příklad 5.3.1. Napište prvních pět členů geometrické posloupnosti, je-li dáno:

a) $a_1 = 4,\ a_2 = \dfrac{4}{3}$,

b) $a_5 = 2\sqrt{3},\ a_3 = \sqrt{3}$.

Slovo **limita** je latinského původu a znamená **mez** nebo **hranici**.

Všimněme si posloupnosti $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Její členy $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$ klesají s rostoucím *n*, nikdy však nebudou menší než 1, neboť $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Členy této posloupnosti se zjevně blíží, neboli konvergují, k jedné. Číslo 1 je limitou této posloupnosti. To znamená, že od určité hodnoty *n* platí $\left|1 - \frac{n+1}{n}\right| < \varepsilon$, kde ε je libovolně zvolené kladné číslo.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** $a \in \mathbf{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $n_0 \in \mathbf{N}$, že je $|a - a_n| < \varepsilon$ pro všechna $n > n_0, n \in \mathbf{N}$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Má-li posloupnost konečnou limitu, říkáme, že je **konvergentní** (sbíhavá**).**

V opačném případě mluvíme o **divergentní** (rozbíhavé) posloupnosti.

Zjistěte, zda je posloupnost $\left\{\frac{3n-7}{3n+7}\right\}$ konvergentní nebo divergentní.

Řešení: Daná posloupnost má n-tý člen $a_n = \dfrac{3n-7}{3n+7}$; (1)

po úpravě $a_n = \dfrac{3n+7-14}{3n+7} = 1 - \dfrac{14}{3n+7} \Rightarrow \quad 1 - a_n = \dfrac{14}{3n+7}$. (2)

Sledujme nyní posloupnost $\left\{\dfrac{14}{3n+7}\right\}$ a snažme se podle definice limity posloupnosti

zjistit její limitu. Snadno vidíme, že je $\left|\dfrac{14}{3n+7}\right| = \dfrac{14}{3n+7}$, (3)

neboť $\forall n \in \mathbf{N}$ je $3n+7>0$. Proto můžeme předpokládat, že

$\left|\dfrac{14}{3n+7}\right| < \varepsilon$ (4)

a odtud po úpravě $14 < 3n\varepsilon + 7\varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \dfrac{14-7\varepsilon}{3\varepsilon} = n_0$. (5)

Obráceně, je-li $n>n_0$, tj. platí-li (5), platí i (4). Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje tedy

takové číslo n_0 , že platí (4) pro všechna $n>n_0$.

Ze vztahů (2), (3), (4) plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Protože ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že $|1-a_n| < \varepsilon, \ \forall n > n_0$.

Podle (1) můžeme tedy psát $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-7}{3n+7} = 1$.

Daná posloupnost je konvergentní, konverguje k $a = 1$.

1. Další věty o počítání s nevlastními body $\infty, -\infty$ zapíšeme symbolicky pro $a \in \boldsymbol{R}$:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{a}{\pm\infty} = 0, & \infty + \infty = \infty, \\
\infty.\infty = \infty, & a + \infty = \infty, \\
\infty.(-\infty) = -\infty & a - \infty = -\infty \\
(-\infty)(-\infty) = \infty, & -\infty - \infty = -\infty.
\end{array}
$$

2. Všimněme si, že výrazy $\dfrac{\infty}{\infty}, \dfrac{0}{0}, 0.\infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 0^\infty, 1^\infty$ se v seznamu symbolických zápisů nevyskytují. Jejich výsledky mohou být jakýmkoliv prvkem z $\boldsymbol{R}^*$ a při výpočtu limit jsou to právě ty limity, jejichž určování může činit problémy.

1. Z definice limity posloupnosti ukažte, že daná posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a. Pro dané ε nalezněte příslušné k

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$; $a=1$; $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}001$; $\varepsilon = 10^{-6}$,

b) $a_n = \dfrac{2^n+1}{2^n}$; $a=1$; $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}001$; $\varepsilon = 10^{-6}$.

2. Vypočtěte limitu posloupnosti:

a) $\left\{3+\dfrac{4}{3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, b) $\left\{\sqrt[n]{5n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, c) $\left\{\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

d) $\left\{\left(2+\dfrac{3}{n}\right)^3\right\}_{n=1}^{\infty}$, e) $\left\{\dfrac{6n+2}{4^{3n-4}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, f) $\left\{\dfrac{4n^2+\sqrt{n^3+1}}{n^2+n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

3. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-4n+7}{17n^2+n-6}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+\sqrt{n^3+n}}{n^2+2n-1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^2}{2n\sqrt{n^2+1}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[5]{n^4}+\sqrt{n^3}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3(2n+1)}{(2n-1)^2(n+1)^2}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n+1}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^2+n}}{n-\sqrt[3]{n}}$, i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n}}$.

4. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4n+5}-2\sqrt{n}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-3n})$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}}$.

Řešení některých příkladů

1. a) $k(\varepsilon)=\left[\frac{2}{\varepsilon}-1\right]$, $k=19;\ 1999;\ 1\,999\,999$; b) $k(\varepsilon)=\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right]$, $k=3;\ 9;\ 19$.

2. a) 3; b) 1; c) 0; d) 8; e) 16; f) 4. **3.** a) $\frac{5}{17}$; b) 4; c) 2; d) 0; e) 0; f) $\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{2}$; h) 0; i) 1. **4.** a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) ∞; d) $\frac{3}{2}$; e) 0; f) $\frac{1}{3}$. **5.** a) $\sqrt{e}$; b) e; c) e^4; d) e; e) e^{-5}; f) e^{-1}; g) $\frac{1}{e}$; h) e^{-5}; i) 3. **6.** a) -2; b) 1; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) 0; f) 1. **7.** a) 1; b) ∞; c) nemá limitu; d) ∞; e) ∞; f) ∞. **8.** a) $2a(2+\sqrt{2})$; b) $\frac{2}{3}a^2$. **9.** a) $2\pi r^2$; b) $4r^2$. **10.** a) $2\pi R$; b) $2\pi R$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} AC_n=\frac{l}{3}$. **12.** $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=a\sqrt{2}$. **13.** $\frac{ab}{2}$.