7. **<u>Hodina – MA1-E</u>**

Posloupnosti a limita

3. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2-4n+7}{17n^2+n-6}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+\sqrt{n^3+n}}{n^2+2n-1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^2}{2n\sqrt{n^2+1}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4+n^2}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[5]{n^4}+\sqrt{n^3}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3(2n+1)}{(2n-1)^2(n+1)^2}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n+1}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^2+n}}{n-\sqrt[3]{n}}$, i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n}}$.

4. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4n+5}-2\sqrt{n}}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-3n})$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}}$.

5. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+3}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^{n}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{1+3n}\right)^{5n-3}$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\ln(n+3)-\ln n\right)$.

6. Vypočtěte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln n-\ln(n+2))$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

7. Vypočtěte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-5n}{n^2-3n+1}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+(-1)^n n)$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)^{n}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(1-\frac{6}{n}+\frac{4}{n^3}\right)$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

Limity

Definici limity a funkce $f(x)$ v $x_0 \in D'_f$ můžeme napsat také ve tvaru:

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ *pro* $\forall x \in D_f$,

Přeloženo: ke každému (libovolně malému) okolí ε funkční hodnoty a existuje okolí δ bodu x_0, tak, že všechny funkční hodnoty bodů x v intervalech:
$(x_0 - \delta, x_0)$ a $(x_0, x_0 + \delta)$
se zobrazí do intervalu:
$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
Pak píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Příklad

1. Ukážeme, že platí $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$

Platí $\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon$ pro $0 < |x - 1| < \delta$, když zvolíme $\delta = \varepsilon$.

Pozn.: funkce nemusí být v daném bodě x_0 definována, ale může tam mít limitu.
Pokud do spojité funkce $f(x)$ dosadíme limitní bod x_0 a vyjde „dobře definované číslo“, získali jsme limitu a. Pokud však vyjde neurčitý výraz:

$$\left(\frac{0}{0}, \frac{2}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \frac{\infty}{\infty} \right)$$

musíme limitu – za předpokladu, že existuje – spočítat jinak.
Dvě základní metody: substituce a úprava krácením.

Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x + 4}{x^2 + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{6}\pi} \sin x$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^2 - x}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 1}$

Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2-16}{x+4}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$

e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

Řešení některých příkladů

1. a) $k(\varepsilon)=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right]$, $k=19$; 1999; $1\,999\,999$; b) $k(\varepsilon)=\left[\log_2\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, $k=3$; 9; 19.

2. a) 3; b) 1; c) 0; d) 8; e) 16; f) 4. **3.** a) $\dfrac{5}{17}$; b) 4; c) 2; d) 0; e) 0; f) $\dfrac{1}{2}$; g) $\dfrac{1}{2}$; h) 0; i) 1. **4.** a) 0; b) $\dfrac{1}{2}$; c) ∞; d) $\dfrac{3}{2}$; e) 0; f) $\dfrac{1}{3}$. **5.** a) $\sqrt{e}$; b) e; c) e^4; d) e; e) e^{-5}; f) e^{-1}; g) $\dfrac{1}{e}$; h) e^{-5}; i) 3. **6.** a) -2; b) 1; c) 0; d) $\dfrac{1}{2}$; e) 0; f) 1. **7.** a) 1; b) ∞; c) nemá limitu; d) ∞; e) ∞; f) ∞. **8.** a) $2a(2+\sqrt{2})$; b) $\dfrac{2}{3}a^2$. **9.** a) $2\pi r^2$; b) $4r^2$. **10.** a) $2\pi R$; b) $2\pi R$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} AC_n=\dfrac{l}{3}$. **12.** $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=a\sqrt{2}$. **13.** $\dfrac{ab}{2}$.