

8. Hodina – MA1-E

Limity

Definici limity a funkce $f(x)$ v $x_0 \in D'_f$ můžeme napsat také ve tvaru:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \text{ pro } \forall x \in D_f,$$

Přeloženo: ke každému (libovolně malému) okolí ε funkční hodnoty a existuje okolí δ bodu x_0 , tak, že všechny funkční hodnoty bodů x v intervalech:

$$(x_0 - \delta, x_0) \text{ a } (x_0, x_0 + \delta)$$

se zobrazí do intervalu:

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Pak píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Příklad

1. Ukážeme, že platí $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

$$\text{Platí } \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon \text{ pro } 0 < |x - 1| < \delta, \text{ když zvolíme } \delta = \varepsilon.$$

Pozn.: funkce nemusí být v daném bodě x_0 definována, ale může tam mít limitu. Pokud do spojitě funkce $f(x)$ dosadíme limitní bod x_0 a vyjde „dobře definované číslo“, získali jsme limitu a . Pokud však vyjde neurčitý výraz:

$$\left(\frac{0}{0}, \frac{2}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \frac{\infty}{\infty} \right)$$

musíme limitu – za předpokladu, že existuje – spočítat jinak.

Dvě základní metody: substituce a úprava krácením.

Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 4}{x^2 + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{6}\pi} \sin x$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 1}$

Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{\sqrt{x + 4} - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$

f) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

Vypočtěte limity:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2 + 5}{x^2 + x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^3 - x^2 + 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - x + 2}{3x^3 + x^2 + x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}$

Příklad 3.25. Máme vypočítat následující limity racionálních lomených funkcí:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^5 - 3x + 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 3)(x + 4)(x + 5)}{x^4 + x - 11}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x}{6 - 13x^2}$

Derivace

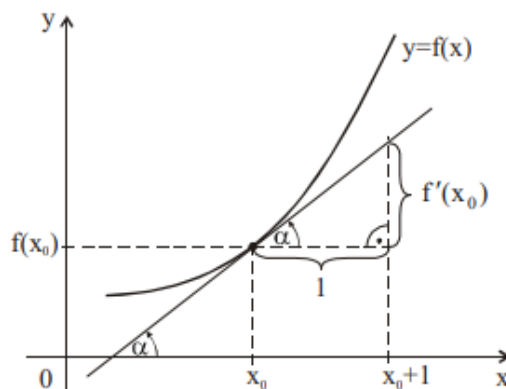
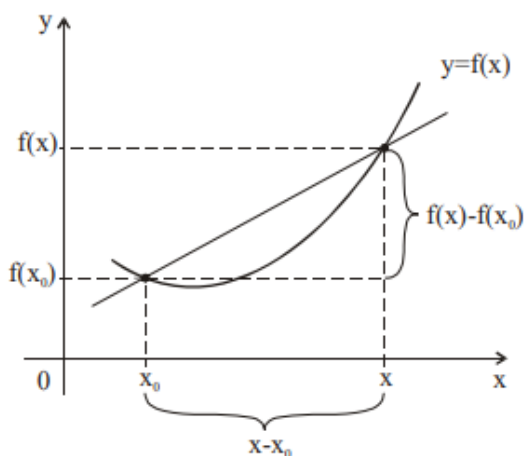
Definice 3.1.1.

Definujme funkci $f_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pro $x \in D_f \setminus \{x_0\}$, kde $x_0 \in D_f \cap D'_f$.

Existuje-li vlastní limita

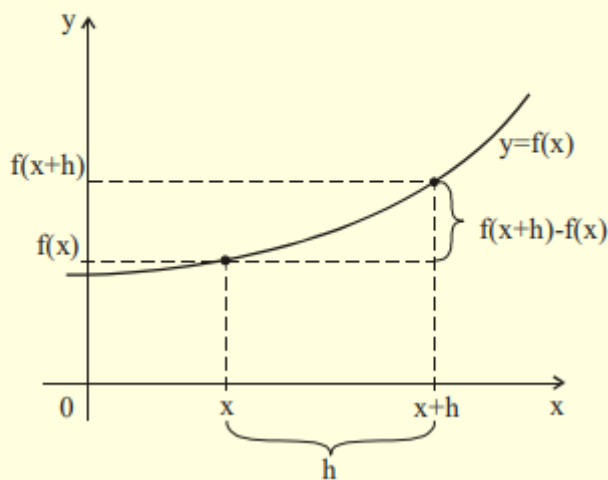
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{x_0}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

řikáme, že **funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$** .



Provedeme-li označení v definici 3.1.1 podle obr. 40, můžeme psát

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $(x^n)' = nx^{n-1}$.

4.1 Na základě definice derivace funkce v bodě vypočtěte derivace funkcí:

a) $y = 5$

b) $y = 2x$

c) $y = x^3 - 1$

d) $y = -3x + 1$

4.2 Na základě definice derivace funkce v bodě vypočtěte derivace funkcí:

a) $y = 1 - x^2$

b) $y = x^2 + x + 1$

c) $y = \frac{1}{x}$

d) $y = x + \frac{1}{x}$

Derivace elementárních funkcí

Derivace elementárních funkcí

$f(x)$	$f'(x)$	<i>pozn.</i>
c	0	$c = \text{const.}$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
x^x	$x^x(1 + \ln x)$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$= -(\operatorname{arccot} x)'$

Derivace součinu

Derivaci součinu počítáme podle vztahu:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Případ, kde použijeme derivaci podílu (protože nám nic jiného nezbyvá).

$$[x^2 \cdot \sin x]' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$$

Derivace podílu

Derivaci podílu funkcí vypočítáme podle vztahu

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Řešení některých příkladů

Řešení příkladu 3.25

Řešení. a)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-1} = 4$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x-2} \cdot \frac{1}{x-1} = 3 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \begin{cases} 3 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \\ 3 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^5 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)^2}{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x^4 + x^3 + x^2 + x - 2} = 0 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 3x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x - 2)}{(x-1)^3} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty \end{aligned}$$

e)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4\frac{1}{x^2}}{1 - 3\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2}} = 1$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4 + x - 11} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}(1 + \frac{3}{x})(1 + \frac{4}{x})(1 + \frac{5}{x})}{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{11}{x^4}} = 0$$

g)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x}{6 - 13x^2} = -\frac{7}{13} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - \frac{2}{7}x}{x^2 - \frac{6}{13}} = -\frac{7}{13} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 - \frac{2}{7}\frac{1}{x^2})}{1 - \frac{6}{13}\frac{1}{x^2}} = -\infty$$