8. Hodina – MA1-E

Limity

Definici limity a funkce $f(x)$ v $x_0 \in D'_f$ můžeme napsat také ve tvaru:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \ \ pro \ \ \forall x \in D_f,$$

Přeloženo: ke každému (libovolně malému) okolí ε funkční hodnoty a existuje okolí δ bodu x_0, tak, že všechny funkční hodnoty bodů x v intervalech:
$(x_0 - \delta, x_0)$ a $(x_0, x_0 + \delta)$
se zobrazí do intervalu:
$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
Pak píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Příklad

1. Ukážeme, že platí $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$

Platí $\left| \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon$ pro $0 < |x - 1| < \delta$, když zvolíme $\delta = \varepsilon$.

Pozn.: funkce nemusí být v daném bodě x_0 definována, ale může tam mít limitu.
Pokud do spojité funkce $f(x)$ dosadíme limitní bod x_0 a vyjde „dobře definované číslo“, získali jsme limitu a. Pokud však vyjde neurčitý výraz:

$$\left(\frac{0}{0}, \frac{2}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \frac{\infty}{\infty} \right)$$

musíme limitu – za předpokladu, že existuje – spočítat jinak.
Dvě základní metody: substituce a úprava krácením.

Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{3x+4}{x^2+1}$

b) $\lim_{x \to \frac{1}{6}\pi} \sin x$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2-x}{x}$

d) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2+4x+3}{x^3+1}$

Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim_{x \to -4} \frac{x^2-16}{x+4}$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$

c) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2+2x-3}{x+3}$

d) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$

e) $\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$

f) $\lim_{x \to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

Vypočtěte limity:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3-x^2+5}{x^2+x-2}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3-x+2}{3x^3+x^2+x-2}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+5}{2x^3-x^2+4}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$

Příklad 3.25. Máme vypočítat následující limity racionálních lomených funkcí:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ c) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2}$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x^5-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$ e) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ f) $\lim_{x \to \infty} \frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$

g) $\lim_{x \to \infty} \frac{7x^3-2x}{6-13x^2}$

Limity a goniometrické funkce.

Nejpoužívanější vzorec:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Příklad 3

Vypočtěte limity funkcí:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos^2 x \sin x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4}{x^2+2} - \dfrac{x}{\sin x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\,\mathrm{tg}^2\, x}{2x^2}$

Příklad 3.27. Máme vypočítat následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x + \sin 7x}{\sin 3x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\mathrm{arctg}\, x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, x - \sin x}{\sin^3 x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+9}}{2x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{3x+4\sqrt{5x}}}}{\sqrt{2x+1}}$

Derivace

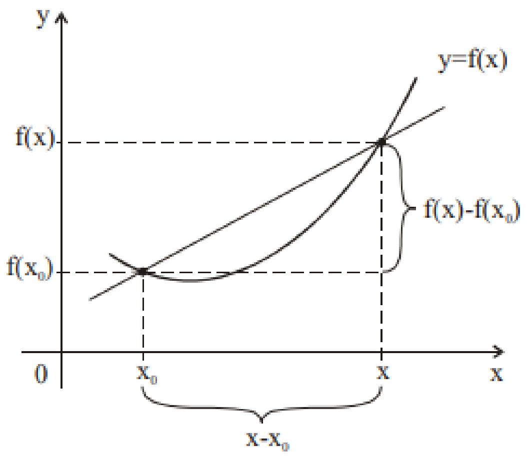
Definice 3.1.1.

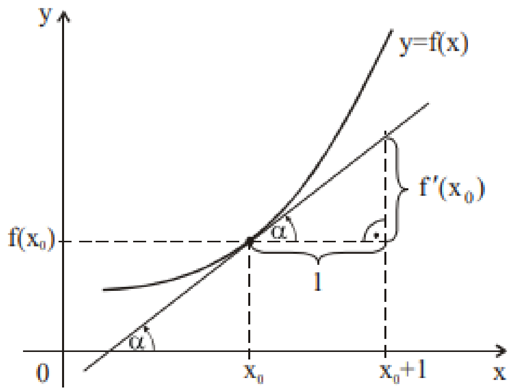
Definujme funkci $f_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pro $x \in D_f \setminus \{x_0\}$, kde $x_0 \in D_f \cap D'_f$.

Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} f_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

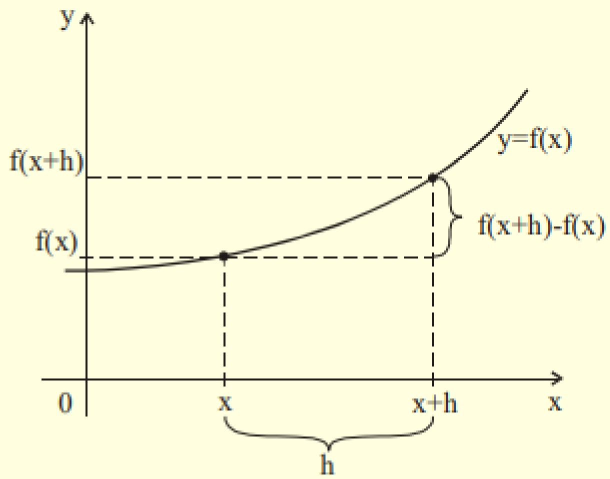
říkáme, že **funkce** $f(x)$ **má v bodě** x_0 **derivaci** $f'(x_0)$.





Provedeme-li označení v definici 3.1.1 podle obr. 40, můžeme psát

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



Dokažte, že pro $n \in \boldsymbol{N}$ platí $(x^n)' = nx^{n-1}$.

4.1 Na základě definice derivace funkce v bodě vypočtěte derivace funkcí:

a) $y = 5$ b) $y = 2x$

c) $y = x^3 - 1$ d) $y = -3x + 1$

4.2 Na základě definice derivace funkce v bodě vypočtěte derivace funkcí:

a) $y = 1 - x^2$ b) $y = x^2 + x + 1$

c) $y = \dfrac{1}{x}$ d) $y = x + \dfrac{1}{x}$

Derivace elementárních funkcí

Derivace elementárních funkcí

$f(x)$	$f'(x)$	*pozn.*
c	0	$c = const.$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
x^x	$x^x(1 + \ln x)$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$= -(\operatorname{arccot} x)'$

Derivace součinu

Derivaci součinu počítáme podle vztahu:

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f(x)'\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x)'$$

Případ, kde použijeme derivaci podílu (protože nám nic jiného nezbývá).

$$\left[x^2\cdot \sin x\right]' = 2x\cdot \sin x + x^2\cdot \cos x$$

Derivace podílu

Derivaci podílu funkcí vypočítáme podle vztahu

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f(x)'\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)'}{(g(x))^2}$$

Příklad 4

Vypočtěte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) $y = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 7x - 3$
b) $y = 5x^2 \cos x + 7$
c) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$
d) $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$
e) $y = \dfrac{x^3 - x + 2}{x^2}$
f) $y = x^2 - \dfrac{1}{x^3}$

Příklad 5

Vypočtěte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) $y = (x^5 + 2x + 1)^7$
b) $y = \sin^2(x^2 - 3x)$

Příklad 6

Vypočtěte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) $y = \dfrac{x^2 \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

b) $y = \dfrac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

c) $y = 2x\sqrt{1 - x^2}$

d) $y = \dfrac{x^2}{(2 - x)^2}$

Řešení některých příkladů

Řešení příkladu 3.25

Řešení. a)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4$$

b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x-2}\cdot\frac{1}{x-1}=3\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\begin{cases}3\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\infty\\ 3\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty\end{cases}$$

c)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)^2}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x^4+x^3+x^2+x-2}=0$$

d)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-2)}{(x-1)^3}=$$

$$=2\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$$

e)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-4\frac{1}{x^2}}{1-3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}=1$$

f)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}(1+\frac{3}{x})(1+\frac{4}{x})(1+\frac{5}{x})}{1+\frac{1}{x^3}-\frac{11}{x^4}}=0$$

g)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x}{6-13x^2}=-\frac{7}{13}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-\frac{2}{7}x}{x^2-\frac{6}{13}}=-\frac{7}{13}\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{2}{7}\frac{1}{x^2})}{1-\frac{6}{13}\frac{1}{x^2}}=-\infty$$

Řešení příkladu 3.27

Řešení.

a) Limita čitatele i jmenovatele je rovna nule; zlomek upravíme tak, abychom (analogicky jako u racionální lomené funkce) příslušný kořenový činitel vykrátili:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2}{x}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Při výpočtu limity jmenovatele jsme použili větu o limitě složené funkce:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2+x}=\sqrt{\lim_{x\to 0}(2+x)}=\sqrt{2}.$$

b) Zde můžeme jmenovatele rozložit jako rozdíl třetích mocnin:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x^3}-8}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x})^3-2^3}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{x+2\sqrt{x}+4}=\frac{1}{12}.$$

g) Limita čitatele i jmenovatele je ∞; budeme postupovat analogicky jako u limit racionálních lomených funkcí, opět s použitím věty o limitě složené funkce:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+9}}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2(3+\frac{9}{x^2})}}{x(2+\frac{3}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{9}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

V čitateli zadaného podílu byla druhá odmocnina výrazu, v němž nejvyšší mocnina x byla 2; můžeme tedy říci, že nejvyšší mocnina x v čitateli je 1 a koeficient u této nejvyšší mocniny x je $\sqrt{3}$. Jmenovatel je polynom 1. stupně s koeficientem u x rovným 2. Vidíme, že náš výsledek je vlastně opět podíl koeficientů u nejvyšších mocnin (jsou-li tyto mocniny stejné).

h) Použijme předchozí úvahu: Nejvyšší mocnina x v čitateli i jmenovateli je $\frac{1}{2}$ a podíl koeficientů u těchto mocnin je $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a to by měl být výsledek. Přesvědčíme se výpočtem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2\sqrt{3x+4\sqrt{5x}}}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}\sqrt{3x+4\sqrt{5x}}}}{\sqrt{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+2\sqrt{3\frac{1}{x}+4\sqrt{5\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$