9. **Hodina – MA1-E**

Derivace

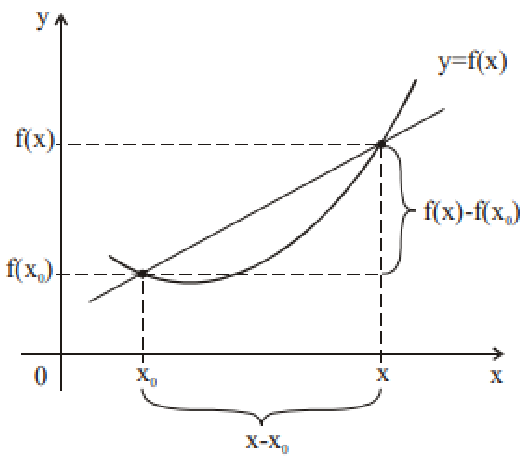
Definice 3.1.1.

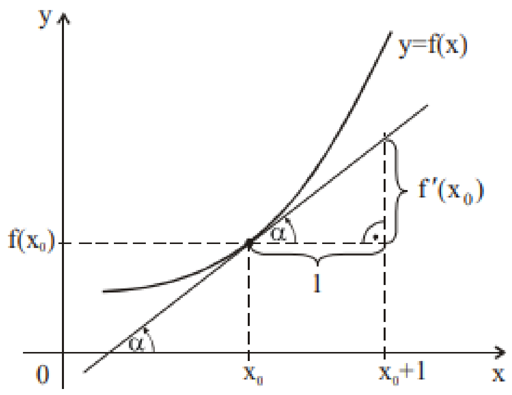
Definujme funkci $f_{x_0}(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ pro $x \in D_f \setminus \{x_0\}$, kde $x_0 \in D_f \cap D'_f$.

Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} f_{x_0}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

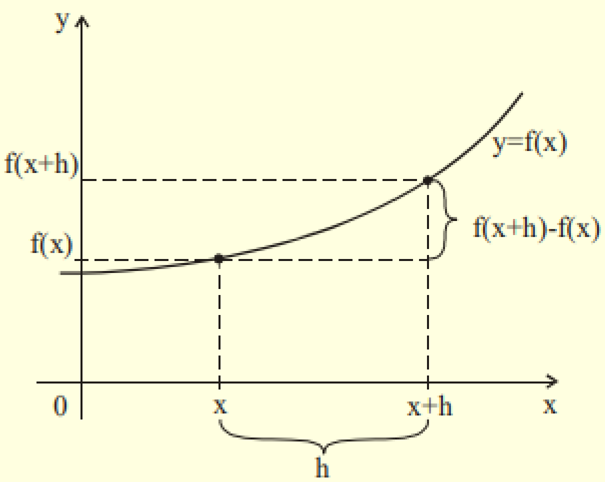
říkáme, že **funkce** $f(x)$ **má v bodě** x_0 **derivaci** $f'(x_0)$.





Provedeme-li označení v definici 3.1.1 podle obr. 40, můžeme psát

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



Dokažte, že pro $n \in \boldsymbol{N}$ platí $(x^n)' = nx^{n-1}$.

4.1 Na základě definice derivace funkce v bodě vypočtěte derivace funkcí:

a) $y = 5$
b) $y = 2x$
c) $y = x^3 - 1$
d) $y = -3x + 1$

4.2 Na základě definice derivace funkce v bodě vypočtěte derivace funkcí:

a) $y = 1 - x^2$
b) $y = x^2 + x + 1$
c) $y = \dfrac{1}{x}$
d) $y = x + \dfrac{1}{x}$

Derivace elementárních funkcí

Derivace elementárních funkcí

$f(x)$	$f'(x)$	$pozn.$
c	0	$c = const.$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
x^x	$x^x(1 + \ln x)$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$= -(\operatorname{arccot} x)'$

Derivace součinu

Derivaci součinu počítáme podle vztahu:

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f(x)'\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x)'$$

Případ, kde použijeme derivaci podílu (protože nám nic jiného nezbývá).

$$\left[x^2\cdot \sin x\right]' = 2x\cdot \sin x + x^2\cdot \cos x$$

Derivace podílu

Derivaci podílu funkcí vypočítáme podle vztahu

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f(x)'\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)'}{(g(x))^2}$$

Příklad 4

Vypočtěte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) $y = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ b) $y = 5x^2\cos x + 7$

c) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ d) $y = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

e) $y = \dfrac{x^3 - x + 2}{x^2}$ f) $y = x^2 - \dfrac{1}{x^3}$

Příklad 5

Vypočtěte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) $y = (x^5 + 2x + 1)^7$ b) $y = \sin^2(x^2 - 3x)$

Příklad 6

Vypočtěte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) $y = \dfrac{x^2 \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ b) $y = \dfrac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

c) $y = 2x\sqrt{1 - x^2}$ d) $y = \dfrac{x^2}{(2 - x)^2}$

Derivace složené funkce

Def.: Jestliže funkce z = g(x) má derivaci v bodě x_0 a jestliže funkce y = f(z) má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, má **složená funkce y = f(g(x)) derivaci v bodě x_0** a platí:

$$\left[f\left(g\left(x_0\right)\right)\right]' = f'\left(g\left(x_0\right)\right) \cdot g'\left(x_0\right)$$

Příklad 5

Vypočtěte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) $y = (x^5 + 2x + 1)^7$ b) $y = \sin^2(x^2 - 3x)$

Příklad 6

Vypočtěte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) $y = \dfrac{x^2 \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ b) $y = \dfrac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$

c) $y = 2x\sqrt{1 - x^2}$ d) $y = \dfrac{x^2}{(2 - x)^2}$

https://www.priklady.eu/cs/matematika.alej

1. Derivujte a upravte funkce:

1.) $y = (x^3 - 2)^5$ 2.) $y = \dfrac{1}{(5-2x)^2}$

3.) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3}$ 4.) $y = \sqrt{8 - \dfrac{1}{x^2}}$

2. Derivujte a upravte funkce:

5.) $y = \sin 2x$ 6.) $y = \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{2}\right)$ 7.) $y = \sqrt{1 + \sin x}$

8.) $y = \sin^2 x$ 9.) $y = \sin^2 x . \cos^2 x$

3. Derivujte a upravte funkce:

10.) $y = e^{\frac{x}{2}}$ 11.) $y = e^{1+\cos x}$

12.) $y = e^{\sqrt{x}}$ 13.) $y = \sin(e^x + \pi)$

5. Derivujte a upravte funkce:

17.) $y = \ln\left(7 + x + x^2\right)$ 18.) $y = \ln(\sin x) - \ln(\cos x)$

19.) $y = \ln \dfrac{x^2 - 5}{x^2 + 5}$

6. Derivujte a upravte funkce:

20.) $y = \ln \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$ 21.) $y = \ln \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

22.) $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$