

ÚLOHY PROCVIČUJÍCÍ MNOŽINY VŠECH BODŮ DANÝCH VLASTNOSTÍ V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

Daniela Bímová

Abstrakt

Příspěvek představuje tři úlohy procvičující množiny všech bodů daných vlastností v prostoru. U všech tří úloh jsou stručně popsána vzorová řešení, která jsou doplněna ilustračními obrázky vytvořenými v softwaru GeoGebra. Příspěvek může být inspirativní pro učitele středních škol.

1 ÚVOD

Již žáci prvního stupně základní školy se setkávají s několika málo nejznámějšími příklady množin všech bodů daných vlastností (MBDV) v rovině, a to např. s kružnicí, osou úsečky, středem kružnice trojúhelníku opsané aj., aniž je jim jejich vyučujícími řečeno, že se o nějaké MBDV jedná. Na druhém stupni základní školy se žáci seznamují s dalšími různými příklady MBDV v rovině, z nichž můžeme jmenovat např. osu úhlu, osy dvou různoběžných přímk, osu pásu tvořeného dvěma rovnoběžnými, navzájem různými přímkami, střed kružnice trojúhelníku vepsané, Thalétovu kružnici atd. Na druhou stranu se ve školské matematice opomíjí určování MBDV v prostoru. A právě úlohy na toto téma mohou velmi vhodným způsobem přispívat nejen k procvičování logického a geometrického myšlení žáků, ale i k rozvíjení jejich prostorové představivosti.

V tomto příspěvku jsou uvedeny tři úlohy, které lze zařadit mezi ty úlohy, jejichž úkolem je určit MBDV v prostoru. První z prezentovaných úloh je možné začlenit pod téma „geometrie povrchu těles“, další dvě patří pod téma „pohyby těles“. Obě témata spadají do tzv. spontánní stereometrie, tj. geometrie v prostoru, v níž k řešení úloh využíváme nejen znalostí základních vlastností těles, ale také prostorových schopností, tedy i prostorové představivosti žáků. První uváděná úloha by mohla být svou obtížností vhodná jak pro žáky druhého stupně základní školy, a to díky možnosti využití názorné pomůcky při hledání jejího řešení v podobě reálné sítě krychle, tak především pro žáky střední školy. Zbývající dvě úlohy odpovídají svými obtížnostmi spíše pro žáky střední školy. Řešení

těchto dvou úloh si žáci mohou vytvořit buď ve svých představách, anebo v podobě virtuálních modelů v některém z vhodných 3D geometrických softwarů.

2 POHYB TĚLESA

Uvedme, co si lze představit pod pojmem pohyb tělesa. Pohybem tělesa v prostoru rozumíme jeho přemístění z jednoho místa na jiné. Přitom těleso lze přemísťovat buď **posunutím** (o danou vzdálenost, v daném směru a dané orientaci, tj. o daný vektor), nebo **otočením** (těleso je možné otáčet kolem daného bodu o určitý orientovaný prostorový úhel či kolem dané přímky o daný orientovaný úhel), anebo tzv. **odvalováním**, při němž dochází ke složení několika otočení kolem různých přímek, tedy os otočení.

Příklady zařazovanými do hodin matematiky jsou např. ty, v nichž je úkolem do políček předem připraveného plánu zakreslit body, které se objevují při postupném odvalování hrací kostky po plánu v jednotlivých políčkách na její spodní stěně. Navíc může být vyžadováno zobrazení správného směru jednotlivých bodů v políčkách plánu. Tj. záleží na směrech zobrazených bodů (především u dvou, tří a šesti bodů) objevujících se na spodních stěnách kostky v příslušných krocích odvalení. Např. u šesti bodů může být rozdílné, zda jsou body zakresleny ve vodorovném či svislém směru, u dvou a tří bodů lze považovat za odlišné zobrazení jejich směru z levého spodního rohu do pravého horního rohu políčka vůči směru z pravého spodního rohu do levého horního rohu políčka. Směry bodů na jednotlivých stěnách hrací kostky bývají dány grafickým znázorněním dané hrací kostky. Jinou alternativou popsání úlohy je např. zakreslení takové cesty odvalování hrací kostky do čtvercové sítě, po níž se kostka pomocí nejmenšího možného počtu odvalení dostane ze své původní polohy na předem vyznačené políčko ve čtvercové síti. K řešení úloh tohoto typu je možné s výhodou užít reálné hrací kostky. Využití manipulativních činností může některým, především slabším žákům, anebo žákům s nižší úrovní prostorové představivosti pomoci s nalezením správného řešení úloh podobného typu, pokud si řešení takovýchto úloh nejsou schopni zobrazit pouze ve svých představách.

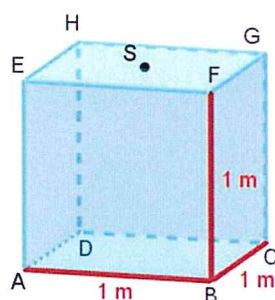
Existují však také úlohy, kde i užití reálných modelů nedokáže dostatečně pomoci s nalezením správného řešení dané úlohy. V takovém případě je vhodné zvolit jinou edukativní pomůcku, může jí být např. vytvořený dynamický applet v geometrickém programu GeoGebra. V GeoGebře lze pomocí jejích dynamických nástrojů nastavit pohybování s objekty, tedy i s tělesy, případně s jejich částmi. Aktivací příkazu *Stopa zapnuta* je pak možné nechat vykreslit stopu pohybujícího se objektu.

3 ÚLOHY K PROCVIČOVÁNÍ MBDV V PROSTORU

V této kapitole jsou uvedena zadání a popsána vzorová řešení tří úloh, jejichž úkoly jsou určení a následné zobrazení množin všech bodů daných vlastností v prostoru.

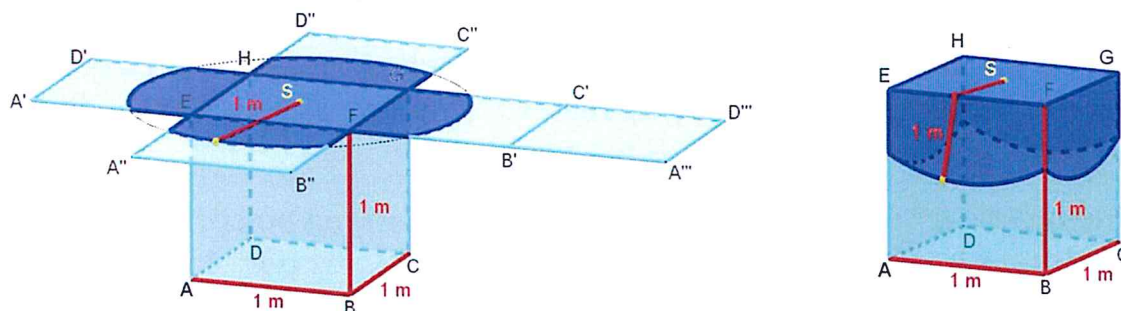
3.1 OBLAST MOŽNOSTI POHYBU BERUŠKY

Úloha 1. Je dána krychle $ABCDEFGH$ s délkou hrany 1 metr (viz obr. 1). Ve středu S čtvercové stěny $EFGH$ se nachází beruška, která je schopná ujít 1 metr za 1 minutu. Vyznačte na povrchu krychle celou oblast, do které je beruška schopná se dostat z bodu S za 1 minutu nebo za dobu kratší.



Obr. 1: Grafické zadání úlohy 1

Řešení. K určení oblasti, tj. množiny bodů, kterou může beruška vycházející z bodu S navštívit na povrchu dané krychle $ABCDEFGH$ do 1 minuty včetně, rozložíme povrch dané krychle do sítě ve tvaru Latinského kříže, a to do roviny EFG horní podstavy dané krychle. Poté v síti určíme všechna místa, na která se na povrchu dané krychle může beruška dostat z bodu S do 1 minuty včetně, a to jako průnik zobrazené sítě a kruhu K (S , $r = 1$ m), viz obr. 2 vlevo. Na obr. 1 i obr. 2 je délka 1 metru zakreslena ve zvoleném měřítku a odpovídá délkám příslušných zobrazených hran modelů krychle. Po vyznačení oblasti průniku kruhu K a sítě krychle složíme síť v model krychle, čímž se na jejím povrchu

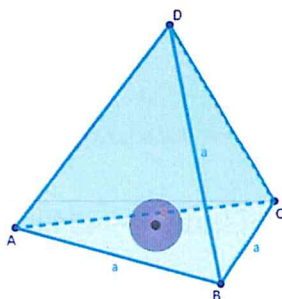


Obr. 2: Ukázka grafického řešení úlohy 1

vyznačí na horní stěně a na bočních stěnách hledaná oblast, viz obr. 2 vpravo. Není-li k dispozici možnost virtuální animace složení sítě v model krychle, přeneseme části rovinných obrazců na jednotlivé stěny zobrazeného modelu krychle podle pravidel užitého zobrazení.

3.2 STOPA STŘEDU POHYBUJÍCÍ SE KOULE UVNITŘ PRAVIDELNÉHO ČTYŘSTĚNU

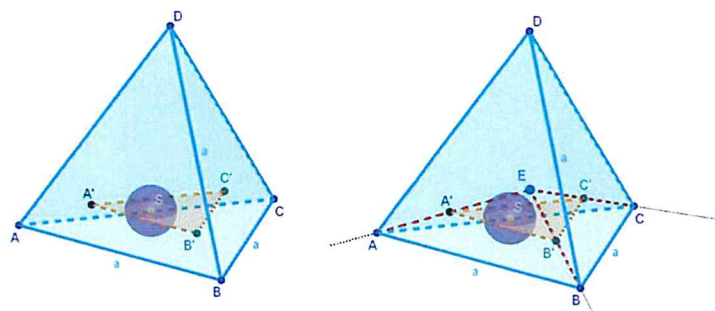
Úloha 2. Jsou dány dutý pravidelný čtyřstěn $ABCD$ s hranou o délce a a uvnitř něj koule se středem S , jejíž poloměr r je menší než poloměr ρ koule vepsané danému pravidelnému čtyřstěnu $ABCD$, viz obr. 3. Daná koule se volně pohybuje uvnitř pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ a přitom se stále dotýká jeho stěny ABC . Určete a zobrazte geometrický útvar, který představuje množinu všech možných poloh středu S dané koule při jejím uvedeném pohybu.



Obr. 3: Grafické zadání úlohy 2

Řešení. Při řešení tohoto problému můžeme uvažovat, že se střed S koule o daném poloměru r pohybuje v rovině σ , která je od stěny ABC daného pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ vzdálena o délku r . A protože se má daná koule pohybovat pouze uvnitř pravidelného čtyřstěnu $ABCD$, bude mít ve svých extrémních polohách vnitřní dotyk postupně se třemi zbývajících stěnami pravidelného čtyřstěnu $ABCD$. V těchto extrémních pozicích se střed S dané koule pohybuje po stranách trojúhelníku $A'B'C'$ ležícího v rovině σ . Strany trojúhelníku $A'B'C'$ leží na průsečnicích roviny σ a rovin po řadě rovnoběžných se stěnami ABD , BCD , CAD pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ a vzdálených od těchto stěn vždy o délku r rovnou poloměru dané koule. V neextrémních polohách splývá střed S dané koule s vnitřními body trojúhelníku $A'B'C'$, viz obr. 4 vlevo.

Vrcholy A' , B' , C' trojúhelníku $A'B'C'$ leží po řadě na polopřímkách EA , EB , EC , a přitom je $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $A'C' \parallel AC$, viz obr. 4 vpravo. Z uvedeného lze odvodit, že trojúhelník $A'B'C'$ je (prostorově) stejnolehý s rovnostranným trojúhelníkem ABC ve stejnolehlosti se středem E totožným se středem

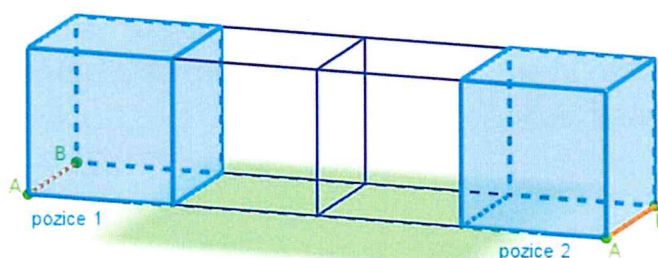


Obr. 4: Ukázka grafického řešení úlohy 2

pravidelného čtyřstěnu a s koeficientem stejnolehlosti $k = \frac{|EA'|}{|EA|} = \frac{|EB'|}{|EB|} = \frac{|EC'|}{|EC|}$.

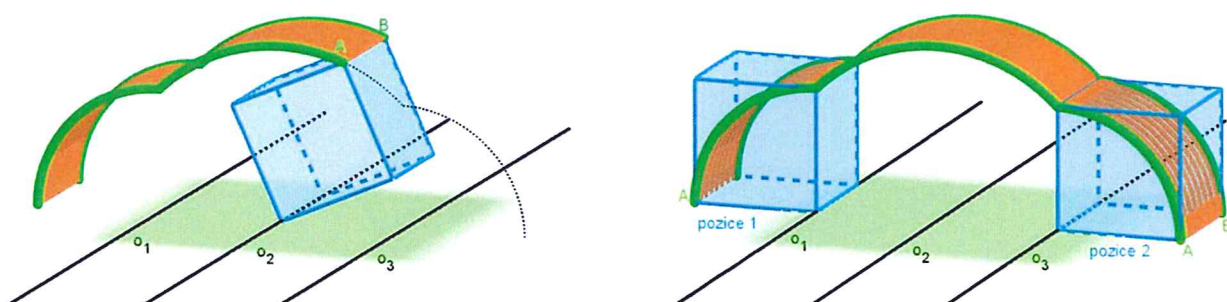
3.3 STOPA HRANY ODVALUJÍCÍ SE KRYCHLOVÉ KRABICE

Úloha 3. Je dána krychlová krabice s vyznačenou hranou AB . Postupně odvalte krychlovou krabici po rovné podložce z pozice 1 do pozice 2, přičemž uvažujte, že všechny čtyři vedle sebe zobrazené krychle mají shodné hrany, viz obr. 5. Určete a následně též načrtněte jednotlivá umístění hrany AB , která vzniknou při uvažovaném odvalování krychlové krabice.



Obr. 5: Grafické zadání úlohy 3

Řešení. Řešení této úlohy je založeno na postupném odvalování krychlové krabice kolem tří os o_1 , o_2 a o_3 , které splývají s odpovídajícími hranami zobrazených krychlí v grafickém zadání úlohy (viz obr. 5), které jsou navzájem rovnoběžné a pro jejichž vzdálenosti platí $|o_1o_2| = |o_2o_3| = 1/2|o_1o_3| = |AB|$. To znamená, že přemístění krychlové krabice po rovné podložce z pozice 1 do pozice 2 spočívá v postupném otočení této krychlové krabice kolem jejích příslušných hran, které v jednotlivých krocích otočení splývají s vyznačenými osami o_1 , o_2 a o_3 (viz obr. 6 vlevo). V každém kroku otočení se tedy jedná o otočení krychlové krabice kolem příslušné osy o_1 , o_2 nebo o_3 o úhel $\varphi = \pm 90^\circ$.



Obr. 6: Ukázka částečného a finálního grafického řešení úlohy 3

Množina všech bodů daných vlastností, kterou při svém pohybu vytvoří hrana AB krychlové krabice je plocha, která vznikne sjednocením částí tří válcových ploch (viz obr. 6 vpravo):

- První válcová plocha je jednou čtvrtinou pláště válce s osou o_1 , s délkou povrchy rovné délce hrany AB krychlové krabice a o poloměru řídicí kružnice rovném též délce hrany AB .
- Druhá válcová plocha je také jednou čtvrtinou pláště válce, tentokrát však válce s osou o_2 , s délkou povrchy rovné opět délce hrany AB krychlové krabice a o poloměru řídicí kružnice rovném délce stěnové úhlopříčky krychlové krabice, tj. o poloměru $|AB| \cdot \sqrt{2}$.
- Třetí válcová plocha je jednou čtvrtinou pláště válce s osou o_3 , s délkou povrchy rovné délce hrany AB krychlové krabice a o poloměru řídicí kružnice rovném délce hrany AB .

4 ZÁVĚR

Lze shrnout, že v příspěvku byly představeny tři úlohy ze spontánní stereometrie, jejichž úkoly bylo určení a následné zobrazení množin všech bodů daných vlastností v prostoru. Ke každé z uvedených úloh lze vymyslet jejich další alternativy a rozšířit tak počet úloh procvičujících téma MBDV v prostoru. Jednou z možných alternativ úlohy „Stopa středu pohybující se koule uvnitř pravidelného čtyřstěnu“ může být např. určení množiny poloh středu S dané koule, která se může volně pohybovat uvnitř celého dutého pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ a ve svých extrémních polohách se může dotýkat všech čtyř stěn daného pravidelného čtyřstěnu $ABCD$. Našími plány do budoucna je vytvoření dalších variant úkolů k uvedeným úlohám, ale i vyhledání či vymyšlení dalších zadání úloh procvičujících téma MBDV v prostoru.

PODĚKOVÁNÍ

Tento článek byl vytvořen jako jeden z výstupů projektu iTEM – Improve Teacher Education in Mathematics (Zlepšování výuky učitelů matematiky), EHP-CZ-ICP-2-018.

LITERATURA

- [1] KUŘINA, F., a kol. *Problémové vyučování v geometrii*. 1. vyd. Praha: SPN, 1976.
- [2] HRADECKÝ, F., KOMAN, M., VYŠÍN, J. *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1963.

