**MA2-E** (1. hodina)

Co byste měli znát:

1) Jak vypadá geometrická řada
2) Nutná (ale nikoli postačující) podmínka konvergence řad

**Věta 3.**

Pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

*(1.1)*

Podmínka 1.1. je podmínkou nutnou pro konvergenci řady, nikoli postačující. Existují tedy řady, které nekonvergují, ale podmínku 1.1 splňují.

3) Podílové kritérium konvergence řad

**Věta 7. *(Podílové (d'Alambertovo) kritérium)***

Nechť $a_n > 0$ pro všechna velká $n$. Platí:

i. Je-li

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1$$

pro všechna dostatečně velká $n$ a jistou konstantu $k$, pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje.

4) Integrální kritérium

**Věta 9. *(Integrální kritérium)***

Nechť je dána řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ a nechť je funkce $f$ definovaná na intervalu $[N, \infty)$ pro jisté $N \in \mathbb{Z}$, přičemž funkce $f$ je na tomto intervalu nezáporná, nerostoucí a platí

$$f(n) = a_n \qquad \text{pro všechna } n \geq N,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Potom platí, že

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konverguje, právě když } \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konverguje,}$$

tj.

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = +\infty \text{ právě tehdy, když } \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

5) Odmocninové kritérium

**Věta 8.** ***(Odmocninové (Cauchyovo) kritérium)***

Nechť $a_n \geq 0$ pro všechna velká $n$.

i. Je-li

$$\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$$

pro všechna dostatečně velká $n$ a jistou konstantu $k$, pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje.

**Příklady:**

**Posloupnosti (opakování)**

Funkce, jejímž definičním oborem je množina **N** všech přirozených čísel, se nazývá **posloupnost (nekonečná číselná posloupnost).**

Příklady posloupností:

1. Čísla 2, 4, 6, 8, 10, 12, … jsou prvními členy posloupnosti sudých kladných čísel. Tato posloupnost vznikne tak, že každému přirozenému číslu $n$ přiřadíme jeho dvojnásobek $2n$. Libovolný člen $a_n = 2n$. Zapisujeme ji $\{2n\}$.
2. Čísla $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ jsou prvními členy posloupnosti převrácených čísel k přirozeným číslům. Dostaneme ji přiřazováním převrácené hodnoty $\frac{1}{n}$ ke každému přirozenému číslu, takže její libovolný člen $a_n = \frac{1}{n}$.
3. Čísla 4, 7, 10, 13, 16, … jsou prvními členy posloupnosti, ve které je každému přirozenému číslu $n$ přiřazeno číslo $1+3n$ a zapisujeme ji $\{1+3n\}$.

**Aritmetická posloupnost** je každá posloupnost určená rekurentně vztahy:

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d, \forall n \in \mathbf{N},$$

kde $a$, $d$ jsou daná reálná čísla.

Číslo $d$ nazýváme **diference** (diference = rozdíl), protože se rovná rozdílu $a_{n+1} - a_n$ kterýchkoliv dvou sousedních členů posloupnosti, tj. $d = a_{n+1} - a_n$.

**Geometrická posloupnost** je každá posloupnost určená rekurentně vztahy $a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n q, \forall n \in N$, kde $a, q$ jsou daná čísla.

Číslo $q$ se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti**. Budeme předpokládat, že je $a \neq 0 \wedge q \neq 0$. V takovém případě je každé $a_n \neq 0$ a z rekurentního vztahu plyne pro kvocient (latinský název pro podíl), že $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje číslo $a \in \mathrm{R}$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathrm{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geqq n_0$ je $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

**Řady**

Vložíme-li mezi každé dva členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ znaménko $+$, dostaneme schéma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

které zapisujeme znakem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (čteme suma $a_n$ od $n = 1$ do nekonečna).

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečná řada. Čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nazýváme členy této řady.

Omezíme se jen na nekonečné geometrické řady a ukážeme si, jak v některých případech dospějeme k pojmu **součet nekonečné řady.**

Vytvoříme posloupnost:

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1,\\
&s_2 = a_1 + a_2,\\
&s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

kterou nazveme **posloupností částečných součtů** dané nekonečné řady. Pro tuto posloupnost pak mohou nastat pouze tyto dva případy: - má limitu $s$;

- nemá limitu.

V prvním případě říkáme, že daná nekonečná řada je **konvergentní,** a číslo $s$ nazýváme jejím **součtem**. V druhém případě říkáme, že nekonečná řada je **divergentní**, tj. nemá součet.

Pokud je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že **nekonečná řada** (2) **je konvergentní**, a příslušnou limitu nazýváme **součet nekonečné řady** (2). Jestliže posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní, říkáme, že **nekonečná řada** (2) **je divergentní**.

Je-li nekonečná řada (2) konvergentní a je-li její součet roven $s$, zapisujeme tuto skutečnost takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Symbolem $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ označujeme tedy nejen nekonečnou řadu, ale též její součet (pokud ovšem existuje).

Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická a její kvocient je $q$, nazýváme nekonečnou řadu (2) **nekonečná geometrická řada** s kvocientem $q$.

Lze dokázat, že nekonečná geometrická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^n$ je konvergentní jenom v tom případě,

když je $|q| < 1$; její součet potom je $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Pro $|q| \geq 1$ je řada divergentní.

**Příklad** Určete součet nekonečné geometrické řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^{n-1}}$.

**Příklad** Najděte řešení dané rovnice: $\dfrac{8}{x+10} = 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{27}{x^3} + \cdots$.

3.25 Zjistěte, které z dále uvedených řad jsou konvergentní; v kladném případě vypočtěte jejich součet:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^{n-1}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

3.26 Je dána aritmetická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí $d$. Zjistěte, pro která $a_1$ a $d$ je nekonečná aritmetická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

*Příklady jsou převzaty ze stránek: (řešení je zde uvedeno také)*

https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js20/nekonecne_rady/web/pages/1-ciselne-rady.html

**Věta 2.**

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B.$$

Platí:

i. $$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = c \cdot A;$$

ii. $$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n = A \pm B,$$

pokud výrazy vpravo mají smysl, tj. neobdržíme-li $0 \cdot \infty$ nebo $\infty - \infty$.

**Věta 3.**

Pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

*(1.1)*

Podmínka 1.1. je podmínkou nutnou pro konvergenci řady, nikoli postačující. Existují tedy řady, které nekonvergují, ale podmínku 1.1 splňují.

***Součet geometrických řad:***

Uvažujte nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{(-3)^n}.$$

Určete její součet.

Určete součet nekonečné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9\cdot 3^n - 2^{n+1}}{6^n}.$$

***K zapamatování (odvození pomocí integrálního kritéria):***

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

konverguje, právě když $\alpha > 1$.

**Věta 5. *(Srovnávací kritérium)***

Nechť $a_n, b_n \geq 0$ a nechť $a_n \leq b_n$ pro všechna dostatečně velká $n$. Platí:

i. Je-li $\sum_{n=N}^{\infty} b_n < +\infty$, pak $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < +\infty$.

ii. Naopak, je-li $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = +\infty$, pak $\sum_{n=N}^{\infty} b_n = +\infty$.

Rozhodněte o konvergenci/divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1234+n)}{n}.$$

Použitím srovnávacího kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}.$$

Použitím srovnávacího kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^2}.$$

**Věta 7.** ***(Podílové (d'Alambertovo) kritérium)***

Nechť $a_n > 0$ pro všechna velká $n$. Platí:

i. Je-li

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1$$

pro všechna dostatečně velká $n$ a jistou konstantu $k$, pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje.

Rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Pomocí podílového kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Pomocí podílového kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

**Věta 8.** ***(Odmocninové (Cauchyovo) kritérium)***

Nechť $a_n \geq 0$ pro všechna velká $n$.

i. Je-li

$$\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$$

pro všechna dostatečně velká $n$ a jistou konstantu $k$, pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje.

Pomocí (limitní verze) odmocninového kritéria rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n+3}\right)^n.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

**Věta 9.** ***(Integrální kritérium)***

Nechť je dána řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ a nechť je funkce $f$ definovaná na intervalu $[N,\infty)$ pro jisté $N \in \mathbb{Z}$, přičemž funkce $f$ je na tomto intervalu nezáporná, nerostoucí a platí

$$f(n) = a_n \qquad \text{pro všechna } n \geq N,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Potom platí, že

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konverguje, právě když } \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konverguje,}$$

tj.

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = +\infty \text{ právě tehdy, když } \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

Použitím integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}.$$

*Některé další příklady (na nutnou podmínku konvergence řad, podílové kritérium, součet geometrické řady atd.) Řešení jsou na konci.*

3.27 Dokažte, že nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} 8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}$ je konvergentní, a určete její součet $s$. Pak najděte nejmenší přirozené číslo $n$ takové, aby platilo $|s - s_n| < 0{,}01$. ($s_n$ značí jako obvykle součet prvních $n$ členů posloupnosti $\left(8 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$.)

3.28 Zjistěte, pro která $x \in \mathsf{R}$ jsou následující nekonečné řady konvergentní, a určete pak jejich součet:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1-5x)^n$

3.29 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^{n-1} = 10$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^{2n} = \frac{1}{3}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-1} = \frac{4x-3}{3x-4}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}} = \frac{1}{x^2-1}$

3.30 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2^x)^n = 1$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log \sqrt[(2^{n-1})]{x} = 2$

3.31 Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathsf{R}$:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x = -\frac{1}{3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^{(2n-2)} x = 2 \cdot \operatorname{tg} x$

*3.32 Řešte rovnici $3 \cdot \left(1 + \log_2 \cos u + \log_2^2 \cos u + \ldots\right) = 2$ s neznámou $u \in \mathsf{R}$.

3.33 Napište ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem tato čísla:

a) $0{,}\overline{4}$ b) $2{,}\overline{5}$ c) $0{,}\overline{12}$

d) $0{,}8\overline{4}$ e) $5{,}4\overline{87}$

3.34 Do čtverce $ABCD$ o délce strany 1 je vepsán čtverec $A_1B_1C_1D_1$ tak, že $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ jsou postupně středy stran $AB$, $BC$, $CD$, $DA$; obdobně vepíšeme čtverec $A_2B_2C_2D_2$ do čtverce $A_1B_1C_1D_1$ atd. (obr. 3.12). Vypočtěte součet obvodů a součet obsahů všech takových čtverců.

**Opakování**

3.38 Rozhodněte, které z následujících posloupností jsou konvergentní; v kladném případě vypočtěte jejich limitu:

a) $\left(\dfrac{n}{n^3+n}\right)_{n=1}^{\infty}$ b) $\left(\dfrac{n^2}{n+5}\right)_{n=1}^{\infty}$

c) $\left(\dfrac{n}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$ d) $(0{,}9^n)_{n=1}^{\infty}$

e) $((-1)^n \cdot (-5)^{n+1})_{n=1}^{\infty}$ f) $\left(\dfrac{3^n-2^n}{4^n}\right)_{n=1}^{\infty}$

3.39 Uveďte, pro která $b \in \mathsf{R}$ je nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b^n$ konvergentní:

a) $b = 0{,}8$ b) $b = 1$

c) $b = -1$ d) $b = 1{,}8$

3.40 Zjistěte, které z následujících nekonečných řad jsou konvergentní; v kladném případě určete jejich součet:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1{,}5)^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 0{,}5 \cdot n$

3.41 Řešte rovnici $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (y-1)^n = 1$ s neznámou $y \in \mathsf{R}$.

3.42 „Spirála“ se skládá z nekonečně mnoha polokružnic. Přitom poloměr každé následující polokružnice je dvakrát menší než poloměr předchozí polokružnice. Určete délku „spirály“, je-li poloměr první polokružnice 5 délkových jednotek.

*3.43 „Dokážeme“, že nekonečná řada $a + (-a) + a + (-a) + a + \ldots$ je pro každé reálné číslo $a$ konvergentní a její součet je roven $\frac{1}{2}a$. Posuďte, kde je v následujícím „důkazu“ chyba: Označíme hledaný součet $x$; tedy $x = a + (-a) + a + (-a) + \ldots = a - (a + (-a) + a + \ldots)$. Výraz v závorce je opět roven $x$, tedy $x = a - x$ neboli $x = \frac{1}{2}a$.

## 3 Limity posloupností a nekonečné řady

**3.1** $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$; $n > 19$; $n > 10^4 - 1$. **3.4** a) 1; b) $-1$; c) divergentní; d) divergentní; e) 5; f) 0. **3.8** Neplatí; např. $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$. **3.9** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. **3.10** a) Divergentní; b) konvergentní, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$. **3.11** 1,5; 3; $-11$; $-\frac{5}{6}$; 7. **3.13** a) 0; b) $-4$; c) 0; d) 0. **3.15** a) 3; b) 1; c) 0; d) divergentní; e) divergentní; f) 2; g) 0; h) $\frac{5}{3}$. **3.16** a) Divergentní; b) 0; c) 3. **3.21** a) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^2\right) = -\infty$; c) divergentní, nemá nevlastní limitu; d) konvergentní, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; e) konvergentní, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 0$; f) konvergentní, $\lim\limits_{n\to\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}\right) = 0$. **3.22** Neexistuje. **3.23** Platí. **3.24** Např. $\left((n-5)^2\right)_{n=1}^{\infty}$. **3.25** a) Divergentní; b) divergentní; c) divergentní; d) $2\sqrt{5}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+1}$; f) $-\frac{2}{5}$. **3.26** $a_1 = 0$ a zároveň $d = 0$. **3.27** 64; 66. **3.28** a) $|x| > 1$, $s = \frac{1}{x-1}$; b) $x \in (0, \frac{2}{5})$, $s = \frac{1-5x}{5x}$. **3.29** a) $x = \frac{3}{10}$; b) $x_1 = -2{,}5$, $x_2 = -1{,}5$; c) $x = 6$; d) $|x| > 1$. **3.30** a) $x = -1$; b) $x = 10$. **3.31** a) $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right\}$; b) $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{1}{4}\pi + k\pi\right\}$. **3.32** $u \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{1}{4}\pi + 2k\pi, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right\}$. **3.33** a) $\frac{4}{9}$; b) $\frac{23}{9}$; c) $\frac{12}{99}$; d) $\frac{76}{90}$; e) $\frac{5\,433}{990}$. **3.34** $4(2+\sqrt{2})$; 2. **3.35** Jde o posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = 2^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. **3.36** Není konvergentní. **3.38** a) 0; b) divergentní; c) 0; d) 0; e) divergentní; f) 0. **3.39** a) Konvergentní; b), c), d) není konvergentní. **3.40** a) Není konvergentní; b) $-\frac{1}{6}$; c) není konvergentní. **3.41** $y = 1{,}5$. **3.42** $10\pi$. **3.43** Nelze uzávorkovat jako při konečném počtu sčítanců. **3.44** Ano. **3.45** Sedmnáctý člen posloupnosti je $17^2$, není tedy prvočíslo. **3.46** **1.** $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = 1 \cdot 2$; **2.** $(1\cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1)) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$. **3.47** 24 850. **3.48** 231. **3.49** 9. **3.50** a) Rostoucí,