11. hodina ***(MA2-E)***

Hledání extrémů funkce více proměnných

Definice 6.1.2.

Řekneme, že bod $A \in \mathbb{R}^n$ je **stacionárním bodem** funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$, jestliže

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Věta 6.1.1.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ má v bodě A lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace funkce f. Pak bod A je stacionárním bodem funkce f.

Poznámka: stacionární bod je pouze nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému, nikoli postačující. Tzn. funkce nutně nemusí mít ve stacionárním bodě extrém.

Označme

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}$$

hlavní determinanty matice parciálních derivací druhého řádu. Pak pro stacionární bod A funkce f platí:

1. Je-li $D_1 > 0 \wedge D_2 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální minimum**,
2. Je-li $D_1 < 0 \wedge D_2 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální maximum**,
3. Je-li $D_2 < 0$, pak pro funkci f v bodě A **extrém neexistuje**.

Věta 6.1.3.

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ je na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ dvakrát spojitě diferencovatelná. Nechť bod A je její stacionární bod. Jestliže

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)\right)^2 > 0,$$

pak má funkce f v bodě A ostrý lokální extrém. Je-li navíc $D_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$, jedná se o **ostré lokální minimum**, je-li $D_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$, jedná se o **ostré lokální maximum**.

Poznámka

V případě, že $D_2 = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout. Tento problém lze v některých případech řešit tak, že vyšetříme lokální chování funkce f na okolí bodu A.

Příklad 6.1.1. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2.$$

Řešení: Funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$. Postup řešení lze rozdělit do následujících kroků:

1. Určíme parciální derivace funkce f prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 6y.$$

2. Parciální derivace položíme rovny nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dostaneme tak soustavu rovnic pro stacionární body funkce f.

$$3x^2 - 3y = 0,$$

$$-3x + 6y = 0.$$

3. Soustavu rovnic pro stacionární body vyřešíme. Ze druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do rovnice první.

$$x = 2y \Rightarrow 3(2y)^2 - 3y = 0 \Rightarrow 12y^2 - 3y = 0 \Rightarrow y(4y-1) = 0 \Rightarrow$$
$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A_1 = [0,0]$$
$$y = \tfrac{1}{4} \Rightarrow -3x + \tfrac{6}{4} = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1}{2} \Rightarrow A_2 = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right].$$

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu funkce f,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Do matice Q postupně dosadíme jednotlivé stacionární body (tzn. x-ovou souřadnici stacionárního bodu za x, y-ovou souřadnici stacionárního bodu za y).

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q(A_2) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Vypočítáme determinanty D_1, D_2 pro matice $Q(A_1)$, $Q(A_2)$. Hodnoty determinantů rozhodnou o charakteru extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0,0]$	0	$-9 < 0$	extrém neexistuje
$A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$	$3 > 0$	$9 > 0$	ostré lokální minimum $z = -\frac{1}{16}$

Příklad 6.1.3. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^3.$$

Řešení: Definičním oborem funkce f je $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$.

1. Určíme parciální derivace funkce f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2.$$

2. Parciální derivace položíme rovny 0, dostáváme soustavu rovnic pro stacionární body,

$$3x^2 = 0,$$
$$3y^2 = 0.$$

3. Řešením soustavy je jediný stacionární bod $A = [0, 0]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix}.$$

5. Do matice Q dosadíme stacionární bod,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Determinant $D_1 = 0$, $D_2 = 0$. Nemůžeme o existenci extrému rozhodnout. Ovšem jaká bude funkční hodnota v bodě A? Dosadíme souřadnice bodu A do funkčního předpisu funkce f, tedy $f(A) = 0$. Jak se funkce chová na okolí bodu $A = [0, 0]$. Když dosadíme za x a za y záporná čísla, hodnota z bude záporná, tj. $z < f(A)$. Pokud za x a y do funkčního předpisu dosadíme kladná čísla, hodnota z bude kladná, tj. $z > f(A)$. Na libovolném okolí bodu $[0, 0]$ existují body, jejichž funkční hodnota je větší než $f(A)$, ale zároveň existují body, jejichž funkční hodnota je menší než $f(A)$. V bodě $A = [0, 0]$ extrém neexistuje.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 6x + 3y^2 - 12y + 11$.

2. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 3xy - x + 2y$.

3. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - xy + 3x + y + 3$.

4. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 - 12x - 2y^2 - 4y$.

5. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{3}y^3 - 9y$.

6. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^5 - 5x + y^3 - 3y$.

7. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 3xy - 2x - 3y + 5y^2 + 3$.

8. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - 4xy + 4x + \frac{9}{2}y^2 - 15y$.

9. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = (x^2 + 4x)y + y^2$.

10. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 20y$.

Poznámka: (pro zápočtový test nepotřebujete)

Výše uvedený postup identifikace extrémů lze zdůvodnit pomocí tzv. konstrukce diferenciálu druhého řádu. Lze ukázat, že v okolí bodu A (například bodu o souřadnicích (1,2)), lze funkci $f(x,y)$ (funkce může mít více než dvě proměnné) přibližně nahradit polynomem druhého řádu. Označme souřadnice bodu $A = (a,b)$. Pak:

$$f(a+dx, b+dy) \approx$$
$$\approx f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}dy\,dx$$

Kde dx a dy jsou proměnné (obvykle libovolná velmi malá čísla), vše ostatní jsou konstanty. Pokud je v bodě $A = (a,b)$ extrém, musí být

$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$

A výše uvedený polynom má tvar:

$$f(a+dx, b+dy) \approx f(a,b) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}dy\,dx$$

Nyní lze ukázat, že pokud se v bodě A nachází **maximum** pak pro *libovolné* proměnné dx a dy (které ale současně nejsou rovny nule) je výraz

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x}(dy)(dx) < 0$$

Říkáme, že v takovém případě je výše uvedený polynom **negativně definitní**.

Pokud se v bodě A nachází **minimum** pak pro *libovolné* proměnné dx a dy platí:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} dy\, dx > 0$$

Říkáme, že v takovém případě je výše uvedený polynom **pozitivně definitní**.

Pokud výše uvedený polynom znaménka střídá pro různého hodnoty proměnných dx a dy, je **indefinitní a extrém v bodě A není**.

- Je-li Q pozitivně definitní, má funkce f v bodě A ostré lokální minimum.
- Je-li Q negativně definitní, má funkce f v bodě A ostré lokální maximum.
- Je-li Q indefinitní, nemá funkce f v bodě A lokální extrém.

Úloha:

Výše uvedeným postupem – konstrukcí diferenciálu druhého řádu dané funkce $f(x,y)$ – určete a identifikujte extrém následující funkce:

$$f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 - 8y$$

Řešení:

Podezřelý bod: [0, 1]

Diferenciál druhého řádu:

$$2(dx)^2 + 0(dx)(dy) + 4(dy)^2$$

Tento diferenciál je však pro libovolné proměnné dx a dy kladný. Bod [0, 1] je tedy minimum.

Výše uvedené téma v řeči determinantů:

(v *semidiefinitním* případě nelze o extrému rozhodnout a musí se zvolit jiný přístup)

3. **Sylvesterovo kritérium**

Nechť A je matice kvadratické formy κ a označme $D_1 = \det[d_{11}]$, $D_2 = \det\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22}\end{bmatrix}$, $\ldots$, $D_n = \det\begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn}\end{bmatrix}$.

Pak platí, že kvadratická forma κ je

(a) pozitivně definitní právě tehdy, když

$$D_1 > 0, \ldots, D_n > 0,$$

(b) negativně definitní právě tehdy, když

$$(-1)^1 D_1 > 0, (-1)^2 D_2 > 0, (-1)^3 D_3 > 0, \ldots, (-1)^n D_n > 0,$$

tedy

$$D_1 < 0, D_2 >, D_3 < 0, \ldots,$$

(c) pozitivně semidefinitní právě tehdy, když

$$D_1 \geq 0, \ldots, D_n \geq 0,$$

(d) negativně semidefinitní právě tehdy, když

$$D_1 \leq 0, D_2 \geq 0, D_3 \leq 0, \ldots,$$

(e) indefinitní právě tehdy, když nenastane žádný případ z výše uvedených.

Příklad

Vyšetřete kvadratickou formu $\kappa = 2\mathrm{d}x^2 + 3\mathrm{d}y^2 + 4\mathrm{d}z^2 - 4\mathrm{d}x\mathrm{d}z - 12\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

Řešení:

$D_1 = 2,\ D_2 = 6,\ D_3 = -60$, kvadratická forma κ je indefinitní.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. Stacionární bod: $A = [-3, 2]$ - ostré lokální minimum $f(A) = -10$.

2. Stacionární bod: $A = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ - extrém neexistuje.

3. Stacionární bod: $A = [1, 5]$ - extrém neexistuje.

4. Stacionární body: $A_1 = [2, -1]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [-2, -1]$ - ostré lokální maximum $f(A_2) = 18$.

5. Stacionární body: $A_1 = [5, 3]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [5, -3]$ - ostré lokální maximum $f(A_2) = \frac{61}{2}$.

6. Stacionární body: $A_1 = [-1, 1]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [1, 1]$ - ostré lokální minimum $f(A_2) = -6$, $A_3 = [1, -1]$ - extrém neexistuje, $A_4 = [-1, -1]$ - ostré lokální maximum $f(A_4) = 6$.

7. Stacionárním bod: $A = [1, 0]$ - ostré lokální minimum $f(A) = 2$.

8. Stacionárním bod: $A = [12, 7]$ - ostré lokální minimum $f(A) = -\frac{57}{2}$.

9. Stacionární body: $A_1 = [0, 0]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [-4, 0]$ - extrém neexistuje, $A_3 = [-2, 2]$ - ostré lokální minimum $f(A_3) = -4$.

10. Stacionární body: $A_1 = [2, 4]$ - ostré lokální minimum $f(A_1) = -58$, $A_2 = [2, -5]$ - extrém neexistuje, $A_3 = [-3, 4]$ - extrém neexistuje, $A_4 = [-3, -5]$ - ostré lokální maximum $f(A_4) = \frac{253}{3}$.

Další úlohy:

Příklad 5. Vypočtěte parciální derivace funkce f podle všech jejích proměnných v obecném bodě a vyčíslete je v daném bodě A, je-li:

a) $f(x, y) = \frac{\pi}{3}x^2y,\ A = [4, 6]$, $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\pi}{3}xy,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pi}{3}x^2\right]$

b) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},\ A = [1, 1]$, $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right]$

c) $f(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{x^4},\ A = [1, 1]$, $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{4y^3}{x^5},\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{3y^2}{x^4}\right]$

d) $f(x, y) = x\sin^2 y,\ A = [1, \pi]$, $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \sin^2 y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x\sin y\cos y\right]$

e) $f(x, y) = e^x\sin(2y),\ A = [0, 0]$, $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = e^x\sin(2y),\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2e^x\cos(2y)\right]$

f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y},\ A = [1, 0]$, $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}\right]$

g) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y},\ A = [1, -1]$, $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\right]$

h) $f(x, y) = x^y,\ A = [2, -1]$, $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1},\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^y\ln x\right]$