

12. hodina (MA2-E)

Extrém funkce f na křivce g – vázané extrémy

Kromě funkce $f(x, y)$ je ještě zadána **vazba** (omezuující podmínka pro x a y) ve tvaru $g(x, y) = 0$. Hledáme extrémy funkce $f(x, y)$, které jsou vázány (leží na ní) křivkou $g(x, y) = 0$.

Budeme používat dvě metody:

- a) **Dosazovací metoda:** z vazby $g(x, y) = 0$ vyjádříme x nebo y a dosadíme do $f(x, y)$, čímž získáme funkci jedné proměnné, a extrémy tedy hledáme podobně jako u funkce jedné proměnné. Tuto metodu použijeme v případě, že z rovnice vazby lze osamostatnit x nebo y .

b)

Věta 4.6 (Metoda využívající jakobiánu, nutná podmínka vázaného extrému). *Nechť funkce f a g mají v okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité obě parciální derivace a nechť funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ vázaný extrém vzhledem k vazbě dané rovnicí $g(x, y) = 0$, potom platí, že determinant*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

U následujících úloh stačí, pokud najdete „podezřelé body“ (body ve kterých se extrém může, ale nemusí nacházet). Důvodem je, že použití jakobiánu je nutnou, nikoli postačující podmínka vázaného extrému).

Příklad 6.2.1. Nalezněte vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = x + y,$$

vzhledem k podmínce $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

Řešení:

Stac. bod A_i
$A_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
$A_2 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$

Příklad 6.2.2. Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = 27(x + y - 1)$$

vzhledem k podmínce $9(x^2 + y^2) = 2x^2y^2$.

Řešení:

Stac. bod A_i
$A_1 = [3, 3]$
$A_2 = [-3, -3]$

Následující úlohu řešte dosazovací metodou a určete, zda se v daném „podezřelém bodě“ skutečně extrém nachází a pokud ano, zda je to minimum nebo maximum:

Příklad 6.2.3. Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = xy - x + y - 1,$$

vzhledem k podmínce $x + y = 1$.

Řešení: Definiční obor funkce $D_f = \mathbb{R}^2$.

1. Z podmínky $x + y = 1$ můžeme vypočítat jak x , tak i y . Z podmínky vyjádříme např. y ,

$$y = 1 - x.$$

2. Dosadíme $y = 1 - x$ do funkce $z = f(x, y) = xy - x + y - 1$ a dostaneme funkci jedné proměnné x ,

$$z = x(1 - x) - x + 1 - x - 1 = -x^2 - x.$$

3. Hledáme extrémy funkce jedné proměnné.

$$z' = -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2},$$

$$z'' = -2 < 0.$$

Druhá derivace je záporná pro všechny body definičního oboru funkce jedné proměnné z , a tedy i v bodě $x = -\frac{1}{2}$ je druhá derivace záporná, $z''(-\frac{1}{2}) = -2 < 0$. Funkce z má v bodě $x = -\frac{1}{2}$ ostré lokální maximum. Dopočítáme hodnotu y ,

$$y = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}.$$

Funkce $f(x, y) = xy - x + y - 1$ má v bodě $A = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ vázané lokální maximum $z = \frac{1}{4}$.

Pozn.: pokud budete následující úlohy řešit metodou jakobiánu, stačí najít podezřelé body. Pokud budete úlohu řešit dosazovací metodou, určete, zda se v daném „podezřelém bodě“ skutečně extrém nachází a pokud ano, zda se jedná o minimum nebo maximum

1. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 2y + 1$ vzhledem k podmínce $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$.

2. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 12x + y - 3$ vzhledem k podmínce $y = -x^3 + 3$.

3. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 3y + 2x^4 + 9x^2 + 6$ vzhledem k podmínce $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.

4. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = e^{x^2+y}$ vzhledem k podmínce $y = -x^3$.

5. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ vzhledem k podmínce $y = x + 3$.

6. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt{4x + y^2 + 5}$ vzhledem k podmínce $y = 2x - 3$.

7. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3$ vzhledem k podmínce $2x + 2y = 1$.

8. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = -8x + 6y - 5$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 = 100$.

9. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 3y - 4$ vzhledem k podmínce $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

10. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = -3x - 9$ vzhledem k podmínce $3y - y^3 = x^2$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $[-\frac{3}{2}, 1]$ - vázané lokální minimum.
2. $[-2, 11]$ - vázané lokální minimum, $[2, -5]$ - vázané lokální maximum.
3. $[0, -2]$ - vázané lokální minimum, $[3, -56]$ - vázané lokální maximum, $[-3, -56]$ - vázané lokální maximum.
4. $[0, 0]$ - vázané lokální minimum, $[\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}]$ - vázané lokální maximum.
5. $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ - vázané lokální minimum.
6. $[1, -1]$ - vázané lokální minimum.
7. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ - vázané lokální minimum.
8. $[8, -6]$ - vázané lokální minimum, $[-8, 6]$ - vázané lokální maximum.
9. $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ - vázané lokální minimum, $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$ - vázané lokální maximum.
10. $[\sqrt{2}, 1]$ - vázané lokální minimum, $[-\sqrt{2}, 1]$ - vázané lokální maximum.

13. Stanovte vázané extrémů dané funkce f vzhledem k daným vazbám:

- | | | |
|-----|----------------------------|--|
| (a) | $f(x, y) = x - y$ | na kružnici $x^2 + y^2 = 2$, |
| (b) | $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ | na přímce $x - 2y + 7 = 0$, |
| (c) | $f(x, y) = e^{xy-4x}$ | na úsečce $y - 2x = 0$, $x \in (0, 5)$, |
| (d) | $f(x, y) = \sqrt{xy}$ | na čtvrtkružnici $x^2 + y^2 = 8$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, |
| (e) | $f(x, y) = e^{xy}$ | na kružnici $x^2 + y^2 = 8$, |
| (f) | $f(x, y) = (x + 2y^2) e^x$ | na přímce $[x, y] = [-1, 2] + t(-1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, |
| (g) | $f(x, y, z) = x - 2y + z$ | na povrchu elipsoidu $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 1$. |

14. Stanovte globální extrémů daných funkcí definovaných na daných množinách:

- (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 4$,
- (b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na trojúhelníku vymezeném přímkami $x - y = 1$, $x = -1$, $x + y = 1$,
- (c) $f(x, y) = xy$ na množině $x^2 + y^2 \leq 8$, $xy \leq 0$.

Diferenciální rovnice

Definice 7.1.1.

Rovnice tvaru $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0$ se nazývá **diferenciální rovnice n -tého řádu** pro funkci $y = y(x)$. Speciálně je

$$F(y', y, x) = 0 \quad \text{nebo} \quad y' = f(x, y)$$

diferenciální rovnice prvního řádu.

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace hledané funkce $y(x)$.

Řešením diferenciální rovnice je každá funkce, která rovnici vyhovuje (na zadané množině).

Graf konkrétního řešení rovnice se nazývá **integrální křivka**.

- **obecné řešení** rovnice 1. řádu představuje množinu funkcí tvaru

$$\phi(x, y, C) = 0 \quad \text{nebo} \quad y = \varphi(x, C);$$

- **partikulární řešení** je konkrétní funkce získaná z obecného řešení volbou nebo výpočtem konstanty C ;
- **výjimečné řešení** nelze získat z obecného pro žádnou hodnotu C ; existuje pouze u některých typů rovnic a v tomto textu se jím nebudeme až na výjimky zabývat.

(Obecné řešení má obecný parametr: konstantu C , která může nabývat různých hodnot. Partikulární řešení má konkrétní hodnotu konstanty C , která se určí na základě dalších podmínek)

Příklad 7.2.1. Je dána rovnice $y' = -2x$. Určete

- a) její obecné řešení,
- b) partikulární řešení určené podmínkou $y(1) = 2$.

Řešení:

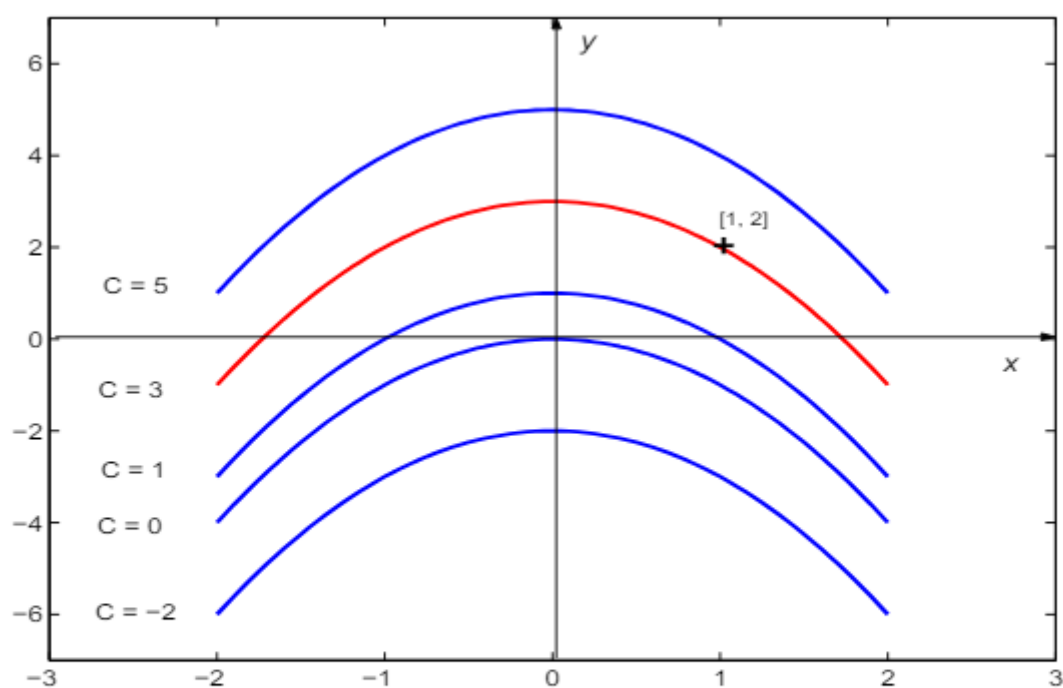
a) $y(x) = \int (-2x) dx = -x^2 + C$, proto soustava parabol o rovnicích $y = C - x^2$ (obr. 7.2.1) představuje obecné řešení úlohy. O jeho správnosti se lze snadno přesvědčit zkouškou.

b) Zadaná podmínka znamená, že hledáme integrální křivku, která prochází bodem $[1, 2]$. Dosazením těchto souřadnic do obecného řešení dostáváme

$$2 = C - 1^2, \quad \text{odkud} \quad C = 3.$$

Výsledným partikulárním řešením je tedy parabola (na obr. 7.2.1 červeně)

$$y_p = 3 - x^2.$$



Obr. 7.2.1. Integrální křivka partikulárního řešení příkladu 7.2.1. a několik dalších parabol z obecného řešení.

3. Najděte obecné řešení rovnic:

a) $(1 - 2y)y' = 2x$

b) $y' \cos y = \sin x$.

4. Řešte počáteční úlohy:

a) $\frac{y'}{y^2} = 2x, \quad y(0) = -\frac{1}{2},$

b) $y' \cdot e^y = 1, \quad y(1) = 0.$

Řešení:

3. a) $y - y^2 = x^2 + C,$

b) $y = \arcsin(C - \cos x).$

4. a) $y = \frac{1}{x^2 - 2},$

b) $y = \ln x.$

Způsob řešení diferenciálních rovnic

1) Separace proměnných

U tohoto typu, který zapisujeme obvykle ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$, postačuje k separaci jednoduchá úprava rovnice (využijeme identity $y' = dy/dx$):

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x) dx ,$$

po níž může hned následovat integrace.

Příklad 8.1.1. Najděte řešení rovnice $y' = -y.\cot g x$.

Řešení: Separace vede k rovnici

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx ,$$

kterou po integraci zapíšeme takto:

$$\ln |y| = - \ln |\sin x| + \ln C .$$

Po odlogaritmování dostáváme obecné řešení

$$y(x) = \frac{C}{\sin x} .$$

Příklad 8.1.2. Najděte řešení počáteční úlohy $(x - 1)y' + y^2 = 0$, $y(2) = -1$.

Řešení: Postup při separaci je zřejmý z následujících kroků (přesvědčte se, že rovnici lze zapsat i ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$):

$$(x-1)y' + y^2 = 0 \implies (x-1)\frac{dy}{dx} = -y^2 \implies \int \frac{dy}{y^2} = - \int \frac{dx}{x-1}.$$

Integrací obdržíme

$$-\frac{1}{y} = -\ln(x-1) + C, \quad \text{odkud} \quad y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - C}.$$

Dosadíme-li do získaného obecného řešení z počáteční podmínky $x = 2, y = -1$, bude

$$-1 = \frac{1}{\ln 1 - C}, \quad \text{tj.} \quad C = 1.$$

Nyní můžeme zapsat hledané řešení počáteční úlohy:

$$y_p(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - 1}.$$

1. Řešte následující separovatelné rovnice:

- a) $y' \sin x = y \cos x$,
- b) $x^2 y' - y^2 = 1$,
- c) $2xyy' = x + 2$,
- d) $(x + y)y' = 1$.

3. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

- a) $y' + e^y = 0, \quad y(0) = 0$,
- b) $(x + y)y' = x - y, \quad y(5) = 2$,

Příklad. Vypočtěme řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{2xe^{x^2}}{(1+y^2)e^y}$$

vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 0$.

Řešení:

1. a) $y = C \cdot \sin x$, b) $y = \operatorname{tg} \left(C - \frac{1}{x} \right)$, c) $y^2 = x + 2 \ln x + C$,
d) $y - \ln(x + y + 1) = C$.
2. a) $y = -\frac{x}{\ln x + C}$, b) $y = x e^{Cx+1}$, c) $y = x(\ln x + C)^2$.
3. a) $y = \ln(1 - x)$, b) $x^2 - 2xy - y^2 = 1$,

2) Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 8.3.1.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR) je každá rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x),$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou funkce spojité na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, v níž hledáme řešení.

Je-li $q(x) = 0$ na M , nazývá se

$$y' + p(x)y = 0$$

zkrácenou lineární rovnicí nebo také rovnicí **bez pravé strany**. V opačném případě hovoříme o **úplné lineární rovnici**.

(V našem případě nazveme „zkrácenou lineární rovnici“ jako rovnici **homogenní**)

Věta 8.3.1.

Zkrácená lineární rovnice má obecné řešení

$$\hat{y}(x) = C \cdot e^{-\int p(x) dx}.$$

Důkaz: Ve zkrácené rovnici lze proměnné snadno separovat, a proto

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx \implies \ln |y| = \int p(x) dx + \ln C \implies y(x) = C \cdot e^{-\int p(x) dx}.$$

Příklad A Určete řešení následující diferenciální rovnice:

$$y' + y \cdot x = 0$$

Věta 8.3.2.

Obecné řešení úplné lineární rovnice má obecné řešení

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x) ,$$

kde $\hat{y}(x)$ je řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení úplné lineární rovnice.

metoda variace konstanty. Její princip spočívá v realizaci předpokladu, že řešení zkrácené rovnice

$$\hat{y}(x) = C \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

bude vyhovovat rovnici úplné, jestliže nahradíme konstantu C vhodnou funkcí, kterou určíme výpočtem. Budeme tedy předpokládat, že

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

Umíme-li stanovit řešení zkrácené LDR (zpravidla to není obtížné), zbývá nalézt způsob určení partikulárního integrálu $v(x)$. Seznámíme se s postupem nazývaným

je hledaným řešením a dosadíme tuto funkci do úplné rovnice:

$$\underbrace{C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} - C(x) e^{-\int p(x) dx} \cdot p(x)}_{y'(x)} + \underbrace{C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}}_{y(x)} \cdot p(x) = q(x) .$$

Na levé straně se odečtou členy obsahující funkci $C(x)$, takže zůstane pouze vztah

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} = q(x) , \quad \text{odkud} \quad C'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} .$$

Finální tvar funkce $C(x)$ stanovíme opět integrací:

$$C(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + K$$

s definitivní konstantou K . Tento výsledek nyní dosadíme do výrazu pro řešení zkrácené rovnice, abychom získali obecné řešení úplné rovnice:

$$y(x) = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + K \right) \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

Po roznásobení obdržíme konečnou podobu hledaného řešení, která odpovídá očekávanému tvaru:

$$y(x) = \underbrace{K \cdot e^{-\int p(x) dx}}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{e^{-\int p(x) dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx}}_{v(x)} .$$

Tím jsme v podstatě provedli konstruktivní důkaz následujícího tvrzení o podobě řešení lineární rovnice.

Věta 8.3.3.

Úplná lineární rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ má obecné řešení $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$ tvořené součtem řešení zkrácené rovnice a partikulárního integrálu

$$v(x) = e^{-\int p(x) dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} .$$

Příklad B Určete řešení následující diferenciální rovnice:

$$y' + y \cdot x = x$$

Řešení: $y = 1 + C \cdot e^{-x^2/2}$ (úloha lze řešit jak metodou variace konstant, tak separací proměnných)

Příklad 8.3.1. Najděte obecné řešení rovnic $xy' - y = 2x^3$.

Řešení: Přepíšeme-li zadání do tvaru

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 ,$$

vidíme, že jde o lineární rovnici, v níž $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = x^2$. Při jejím řešení budeme postupovat podrobně podle kroků popsaných v odvození.

1. Nejprve vyřešíme separací proměnných zkrácenou rovnici:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad \implies \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \implies \quad \ln|y| = \ln|x| + C ,$$

odkud

$$\hat{y} = Cx .$$

2. Nyní přistoupíme k variaci konstanty, při níž budeme předpokládat, že $y(x) = C(x).x$. Tuto funkci a její derivaci $y'(x) = C'(x).x + C(x)$ dosadíme do úplné rovnice:

$$x.(C'(x).x + C(x)) - (C'(x).x + C(x)) = 2x^3.$$

Vzhledem k tomu, že byl dosavadní postup správný, vyruší se členy $\pm C(x).x$ a lze pokračovat dalšími kroky:

$$C'(x).x^2 = 2x^3 \quad \implies \quad C(x) = \int 2x \, dx = x^2 + K.$$

3. Získaný výsledek dosadíme zpět do řešení zkrácené rovnice a po drobné úpravě dostáváme hledané obecné řešení:

$$y(x) = (x^2 + K).x = Kx + x^3.$$

4. Na závěr provedeme zkoušku dosazením do levé strany zadané rovnice:

$$x(K + 3x^2) - Kx - x^3 = 2x^3,$$

což je rovno výrazu na pravé straně.

Příklad 8.3.2. Řešte počáteční úlohu $y' \sin x - y \cos x = \sin^3 x$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

Řešení: Opět se nejprve ujistíme, že jde o lineární rovnici:

$$y' - y \frac{\cos x}{\sin x} = \sin^2 x, \quad \text{tj.} \quad p(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}, \quad q(x) = \sin^2 x.$$

1. Zkrácená rovnice:

$$y' = y \frac{\cos x}{\sin x} \quad \implies \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \quad \implies \quad \ln |y| = \ln |\sin x| + \ln C.$$

Řešení zkrácené rovnice:

$$\hat{y} = C \cdot \sin x.$$

2. Variace konstanty:

$$y = C(x) \cdot \sin x, \quad y' = C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x.$$

Dosazení do úplné rovnice:

$$(C' \cdot \sin x + C \cdot \cos x) \cdot \sin x - C \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin^3 x ,$$

$$C' \sin^2 x = \sin^3 x \quad \implies \quad C(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + K .$$

3. Zpětné dosazení:

$$y(x) = (-\cos x + K) \cdot \sin x = K \sin x - \sin x \cos x .$$

4. Počáteční úloha pro $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = K \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \quad \implies \quad \frac{1}{2} = K \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \implies \quad K = \sqrt{2} .$$

Výsledné řešení má tedy tvar

$$y_p(x) = \sqrt{2} \sin x - \sin x \cos x .$$

1. Najděte obecné řešení:

a) $y' - y = e^{2x}$,

b) $y' - \frac{x+1}{x}y = x^2$,

c) $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2$.

2. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $xy' - y = \sqrt{x}$, $y(4) = 12$,

b) $y' + y \cdot \cotg x = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$,

c) $x^2y' + xy = \ln x$, $y(1) = \frac{1}{2}$.

Řešení:

1. a) $y = Ke^x + e^{2x}$, b) $y = Kxe^x - x^2 - x$,

c) $y = K(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(x - \operatorname{arctg} x)$.

2. a) $y = 2x\sqrt{x} - x$, b) $y = \cotg x$, c) $y = \frac{1+\ln^2 x}{2x}$.