

Diferenciální rovnice**Definice 7.1.1.**

Rovnice tvaru $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0$ se nazývá **diferenciální rovnice n -tého řádu** pro funkci $y = y(x)$. Speciálně je

$$F(y', y, x) = 0 \quad \text{nebo} \quad y' = f(x, y)$$

diferenciální rovnice prvního řádu.

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace hledané funkce $y(x)$.

Řešením diferenciální rovnice je každá funkce, která rovnici vyhovuje (na zadané množině).

Graf konkrétního řešení rovnice se nazývá **integrální křivka**.

- **obecné řešení** rovnice 1. řádu představuje množinu funkcí tvaru

$$\phi(x, y, C) = 0 \quad \text{nebo} \quad y = \varphi(x, C);$$

- **partikulární řešení** je konkrétní funkce získaná z obecného řešení volbou nebo výpočtem konstanty C ;
- **výjimečné řešení** nelze získat z obecného pro žádnou hodnotu C ; existuje pouze u některých typů rovnic a v tomto textu se jím nebudeme až na výjimky zabývat.

(Obecné řešení má obecný parametr: konstantu C , která může nabývat různých hodnot. Partikulární řešení má konkrétní hodnotu konstanty C , která se určí na základě dalších podmínek)

Příklad 7.2.1. Je dána rovnice $y' = -2x$. Určete

- a) její obecné řešení,
- b) partikulární řešení určené podmínkou $y(1) = 2$.

Řešení:

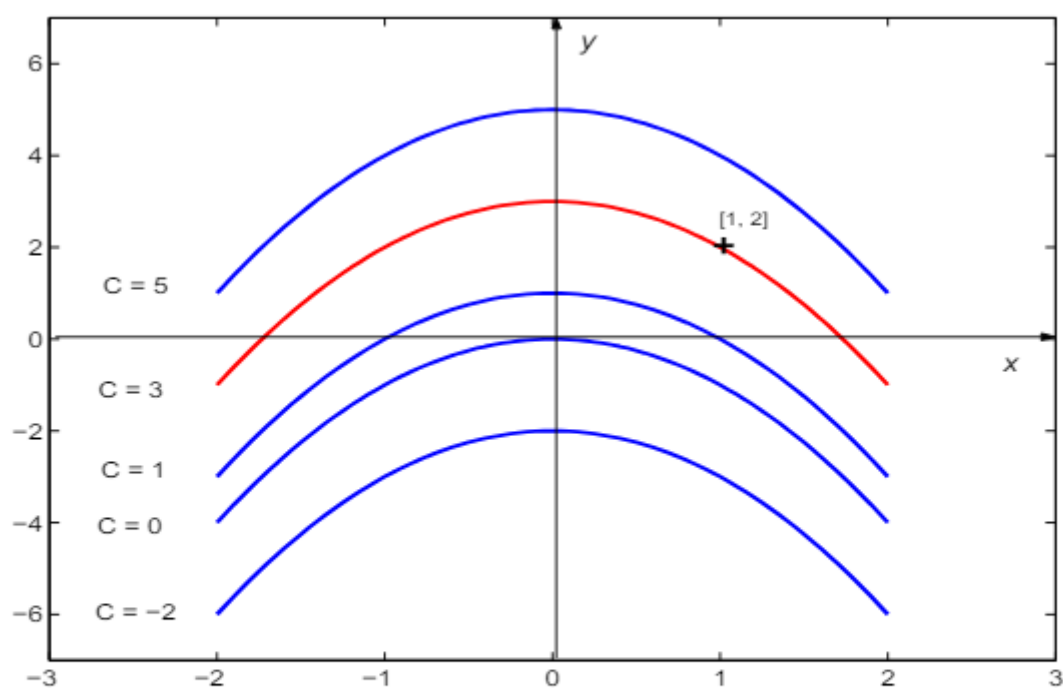
a) $y(x) = \int (-2x) dx = -x^2 + C$, proto soustava parabol o rovnicích $y = C - x^2$ (obr. 7.2.1) představuje obecné řešení úlohy. O jeho správnosti se lze snadno přesvědčit zkouškou.

b) Zadaná podmínka znamená, že hledáme integrální křivku, která prochází bodem $[1, 2]$. Dosazením těchto souřadnic do obecného řešení dostáváme

$$2 = C - 1^2, \quad \text{odkud} \quad C = 3.$$

Výsledným partikulárním řešením je tedy parabola (na obr. 7.2.1 červeně)

$$y_p = 3 - x^2.$$



Obr. 7.2.1. Integrální křivka partikulárního řešení příkladu 7.2.1. a několik dalších parabol z obecného řešení.

3. Najděte obecné řešení rovnic:

a) $(1 - 2y)y' = 2x$

b) $y' \cos y = \sin x$.

4. Řešte počáteční úlohy:

a) $\frac{y'}{y^2} = 2x, \quad y(0) = -\frac{1}{2},$

b) $y' \cdot e^y = 1, \quad y(1) = 0.$

Řešení:

3. a) $y - y^2 = x^2 + C,$

b) $y = \arcsin(C - \cos x).$

4. a) $y = \frac{1}{x^2 - 2},$

b) $y = \ln x.$

Způsob řešení diferenciálních rovnic

1) Separace proměnných

U tohoto typu, který zapisujeme obvykle ve tvaru $y' = P(x) \cdot Q(y)$, postačuje k separaci jednoduchá úprava rovnice (využijeme identity $y' = dy/dx$):

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x) dx,$$

po níž může hned následovat integrace.

Příklad 8.1.1. Najděte řešení rovnice $y' = -y \cdot \cot x$.

Řešení: Separace vede k rovnici

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{\cos x}{\sin x} dx ,$$

kterou po integraci zapíšeme takto:

$$\ln |y| = - \ln |\sin x| + \ln C .$$

Po odlogaritmování dostáváme obecné řešení

$$y(x) = \frac{C}{\sin x} .$$

Příklad 8.1.2. Najděte řešení počáteční úlohy $(x-1)y' + y^2 = 0$, $y(2) = -1$.

Řešení: Postup při separaci je zřejmý z následujících kroků (přesvědčte se, že rovnici lze zapsat i ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$):

$$(x-1)y' + y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = -y^2 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = - \int \frac{dx}{x-1} .$$

Integrací obdržíme

$$-\frac{1}{y} = -\ln(x-1) + C , \quad \text{odkud} \quad y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - C} .$$

Dosadíme-li do získaného obecného řešení z počáteční podmínky $x = 2$, $y = -1$, bude

$$-1 = \frac{1}{\ln 1 - C} , \quad \text{tj.} \quad C = 1 .$$

Nyní můžeme zapsat hledané řešení počáteční úlohy:

$$y_p(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - 1} .$$

1. Řešte následující separovatelné rovnice:

a) $y' \sin x = y \cos x$,

b) $x^2 y' - y^2 = 1$,

c) $2xyy' = x + 2$,

d) $(x + y)y' = 1$.

3. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $y' + e^y = 0$, $y(0) = 0$,

b) $(x + y)y' = x - y$, $y(5) = 2$,

Řešení:

1. a) $y = C \cdot \sin x$, b) $y = \operatorname{tg} \left(C - \frac{1}{x} \right)$, c) $y^2 = x + 2 \ln x + C$,

d) $y - \ln(x + y + 1) = C$.

2. a) $y = -\frac{x}{\ln x + C}$, b) $y = xe^{Cx+1}$, c) $y = x(\ln x + C)^2$.

3. a) $y = \ln(1 - x)$, b) $x^2 - 2xy - y^2 = 1$,

Diferenciální rovnice

1) Metoda variace konstanty

Definice 2.5 Lineární diferenciální rovnici prvního řádu (zkráceně LDR) nazýváme každou rovnici tvaru

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou spojité funkce na určitém intervalu $\langle a, b \rangle$. Dále

1. je-li $q(x) = 0$, hovoříme o zkrácené (homogenní) LDR,
2. je-li $q(x) \neq 0$, hovoříme o nezkrácené (úplné, nehomogenní) LDR.

(V našem případě nazveme „zkrácenou lineární rovnici“ jako rovnici **homogenní**)

Věta 8.3.1.

Zkrácená lineární rovnice má obecné řešení

$$\hat{y}(x) = C \cdot e^{-\int p(x) dx}.$$

Důkaz: Ve zkrácené rovnici lze proměnné snadno separovat, a proto

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx \implies \ln |y| = \int p(x) dx + \ln C \implies y(x) = C \cdot e^{-\int p(x) dx}.$$

Příklad A Určete řešení následující diferenciální rovnice:

$$y' + y \cdot x = 0$$

Věta 8.3.2.

Obecné řešení úplné lineární rovnice má obecné řešení

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x),$$

kde $\hat{y}(x)$ je řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení úplné lineární rovnice.

Umíme-li stanovit řešení zkrácené LDR (zpravidla to není obtížné), zbývá nalézt způsob určení partikulárního integrálu $v(x)$. Seznámíme se s postupem nazývaným

metoda variace konstanty. Její princip spočívá v realizaci předpokladu, že řešení zkrácené rovnice

$$\hat{y}(x) = C \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

bude vyhovovat rovnici úplné, jestliže nahradíme konstantu C vhodnou funkcí, kterou určíme výpočtem. Budeme tedy předpokládat, že

$$y(x) = C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

je hledaným řešením a dosadíme tuto funkci do úplné rovnice:

$$\underbrace{C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} - C(x) e^{-\int p(x) dx} \cdot p(x)}_{y'(x)} + \underbrace{C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} \cdot p(x)}_{y(x)} = q(x) .$$

Na levé straně se odečtou členy obsahující funkci $C(x)$, takže zůstane pouze vztah

$$C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} = q(x) , \quad \text{odkud} \quad C'(x) = q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} .$$

Finální tvar funkce $C(x)$ stanovíme opět integrací:

$$C(x) = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + K$$

s definitivní konstantou K . Tento výsledek nyní dosadíme do výrazu pro řešení zkrácené rovnice, abychom získali obecné řešení úplné rovnice:

$$y(x) = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + K \right) \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

Po roznásobení obdržíme konečnou podobu hledaného řešení, která odpovídá očekávanému tvaru:

$$y(x) = \underbrace{K \cdot e^{-\int p(x) dx}}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{e^{-\int p(x) dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx}}_{v(x)} .$$

Tím jsme v podstatě provedli konstruktivní důkaz následujícího tvrzení o podobě řešení lineární rovnice.

Věta 8.3.3.

Úplná lineární rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ má obecné řešení $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$ tvořené součtem řešení zkrácené rovnice a partikulárního integrálu

$$v(x) = e^{-\int p(x) dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} .$$

Příklad B Určete řešení následující diferenciální rovnice:

$$y' + y \cdot x = x e^{-x^2/2}$$

Řešení: $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot e^{-x^2/2}$

Příklad 8.3.1. Najděte obecné řešení rovnic $xy' - y = 2x^3$.

Řešení: Přepíšeme-li zadání do tvaru

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 ,$$

vidíme, že jde o lineární rovnici, v níž $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = x^2$. Při jejím řešení budeme postupovat podrobně podle kroků popsaných v odvození.

1. Nejprve vyřešíme separací proměnných zkrácenou rovnici:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow \quad \ln |y| = \ln |x| + C ,$$

odkud

$$\hat{y} = Cx .$$

2. Nyní přistoupíme k variaci konstanty, při níž budeme předpokládat, že $y(x) = C(x) \cdot x$. Tuto funkci a její derivaci $y'(x) = C'(x) \cdot x + C(x)$ dosadíme do úplné rovnice:

$$x \cdot (C'(x) \cdot x + C(x)) - (C'(x) \cdot x + C(x)) = 2x^3.$$

Vzhledem k tomu, že byl dosavadní postup správný, vyruší se členy $\pm C(x) \cdot x$ a lze pokračovat dalšími kroky:

$$C'(x) \cdot x^2 = 2x^3 \quad \implies \quad C(x) = \int 2x \, dx = x^2 + K.$$

3. Získaný výsledek dosadíme zpět do řešení zkrácené rovnice a po drobné úpravě dostáváme hledané obecné řešení:

$$y(x) = (x^2 + K) \cdot x = Kx + x^3.$$

4. Na závěr provedeme zkoušku dosazením do levé strany zadané rovnice:

$$x(K + 3x^2) - Kx - x^3 = 2x^3,$$

což je rovno výrazu na pravé straně.

Příklad 8.3.2. Řešte počáteční úlohu $y' \sin x - y \cos x = \sin^3 x$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

Řešení: Opět se nejprve ujistíme, že jde o lineární rovnici:

$$y' - y \frac{\cos x}{\sin x} = \sin^2 x, \quad \text{tj.} \quad p(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}, \quad q(x) = \sin^2 x.$$

1. Zkrácená rovnice:

$$y' = y \frac{\cos x}{\sin x} \quad \implies \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \quad \implies \quad \ln |y| = \ln |\sin x| + \ln C.$$

Řešení zkrácené rovnice:

$$\hat{y} = C \cdot \sin x.$$

2. Variace konstanty:

$$y = C(x) \cdot \sin x, \quad y' = C' \cdot \sin x + C \cdot \cos x.$$

Dosazení do úplné rovnice:

$$(C' \cdot \sin x + C \cdot \cos x) \cdot \sin x - C \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin^3 x ,$$

$$C' \sin^2 x = \sin^3 x \quad \implies \quad C(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + K .$$

3. Zpětné dosazení:

$$y(x) = (-\cos x + K) \cdot \sin x = K \sin x - \sin x \cos x .$$

4. Počáteční úloha pro $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = K \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \quad \implies \quad \frac{1}{2} = K \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \implies \quad K = \sqrt{2} .$$

Výsledné řešení má tedy tvar

$$y_p(x) = \sqrt{2} \sin x - \sin x \cos x .$$

1. Najděte obecné řešení:

a) $y' - y = e^{2x}$,

b) $y' - \frac{x+1}{x}y = x^2$,

c) $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2$.

2. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $xy' - y = \sqrt{x}$, $y(4) = 12$,

b) $y' + y \cdot \cotg x = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$,

c) $x^2y' + xy = \ln x$, $y(1) = \frac{1}{2}$.

Řešení:

1. a) $y = Ke^x + e^{2x}$, b) $y = Kxe^x - x^2 - x$,

c) $y = K(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(x - \operatorname{arctg} x)$.

2. a) $y = 2x\sqrt{x} - x$, b) $y = \cotg x$, c) $y = \frac{1+\ln^2 x}{2x}$.

Další úlohy (mix):

A) Separace proměnných

Příklad 2.4 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$.

Příklad 2.5 Řešte Cauchyho úlohu $\frac{y'}{y} = -2 \sin x$, $y(\pi) = 1$.

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' \tan x - y = 3$

g) $1 + y^2 + xy y' = 0$

b) $xy' + y = y^2$

h) $(1 + e^x)yy' = e^y$

c) $y' = 10^{x+y}$

i) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

d) $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

j) $\sqrt{1-y^2}dx = y\sqrt{1-x^2}dy$

e) $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$

k) $e^{-y} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 1$

f) $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$

l) $\frac{x^3 dx}{\sin y} + \frac{y dy}{x} = 0$

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte Cauchyho úlohu:

a) $2(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 0$

d) $(1 + e^x)\frac{y'}{y} + e^x = 0$, $y(0) = 1$

b) $y' \sin x = y \ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$

e) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$

c) $\sin x \sin y y' = \cos x \cos y$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

f) $y - xy' = 5(1 + x^2 y')$, $y(1) = 1$

B) Metoda variace konstanty

Příklad 2.13 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' - y = e^{2x}$.

Příklad 2.14 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $x^2 y' + xy = \ln x$

Příklad 2.16 Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y \sin x = \sin^3 x$.

Řešení:

Nejprve vyřešíme zkrácenou LDR

$$y' + y \sin x = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\sin x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx + C \Rightarrow \ln|y| = \cos x + C$$

Řešení zkrácené rovnice: $\hat{y} = Ce^{\cos x}$.

Provedeme variaci konstanty $C = C(x)$.

$$\begin{aligned} y &= C(x)e^{\cos x} \\ y' &= C'(x)e^{\cos x} + C(x)e^{\cos x}(-\sin x) \end{aligned}$$

Dosadíme do původní rovnice:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{\cos x} + C(x)e^{\cos x}(-\sin x) + C(x)e^{\cos x} \sin x &= \sin^3 x \\ C'(x)e^{\cos x} &= \sin^3 x \\ C'(x) &= e^{-\cos x} \sin^3 x. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} C(x) &= \int e^{-\cos x} \sin^3 x dx = \int e^{-\cos x} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = \\ &= -\int e^{-t} (1 - t^2) dt = \left| \begin{array}{ll} u = 1 - t^2 & v' = e^{-t} \\ u' = -2t & v = -e^{-t} \end{array} \right| = (1 - t^2)e^{-t} + \int 2te^{-t} dt = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = 2t & v' = e^{-t} \\ u' = 2 & v = -e^{-t} \end{array} \right| = (1 - t^2)e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} = -(t^2 + 2t + 1)e^{-t} = \\ &= -(\cos x + 1)^2 e^{-\cos x} + C. \end{aligned}$$

Dosadíme do předpokládaného tvaru obecného řešení

$$y = \left(-(\cos x + 1)^2 e^{-\cos x} + C \right) e^{\cos x}$$

a po úpravě dostaneme

$$y = -(\cos x + 1)^2 + Ce^{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Úlohy k samostatnému řešení

Řešte diferenciální rovnice:

a) $y' + 2y = 4x$

b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

c) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

d) $x(y' - y) = (1+x^2)e^x$

e) $y' = \frac{2x \ln x - y + x}{x}$

f) $y' = e^{2x} - e^x y$

g) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$

h) $y' = 2y - x^2$

i) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

j) $x(x^2+1)y' + y = x(1+x^2)^2$

k) $x^2 dy + (3-2xy)dx = 0$

l) $x dy = (x^3 - y)dx$

m) $\frac{dy}{dx} = y \cos x + \sin 2x$

n) $2x dy + (x^2 - 6y)dx = 0$