

**Vektory a vektorový prostor**

**Definice.** Jsou dány dva  $n$ -složkové vektory  $\vec{v}, \vec{w}$  a reálné číslo  $r$ . Definujeme následující početní operace (úkony) s vektory:

součet vektorů	$\vec{v} + \vec{w}$	složky výsledku se vypočtou jako $v_i + w_i$
rozdíl vektorů	$\vec{v} - \vec{w}$	složky výsledku se vypočtou jako $v_i - w_i$
$r$ -násobek vektoru	$r \cdot \vec{v}$	složky výsledku se vypočtou jako $r \cdot v_i$
skalární součin vektorů	$\vec{v} \cdot \vec{w}$	výsledek je číslo $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n$
norma vektoru	$\ \vec{v}\ $	výsledek je číslo $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$
dělení vektorů	- - -	<b>není definováno</b>

**Ukázky:** Pro čtyřsložkové vektory  $\vec{v} = (1, 2, 6, -1)$ ,  $\vec{w} = (0, 4, -3, 0)$  bude  $\vec{v} + \vec{w} = (1, 6, 3, -1)$ ,  $2\vec{v} - \vec{w} = (2, 0, 15, -2)$ ,  $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 = -10$ ,  $\|\vec{w}\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

**Příklad** Množina  $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}, \text{ kde } i = 1, \dots, n; n \in \mathbf{N}\}$ , v níž jsou operace definovány vztahy

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n), k \in \mathbf{R},$$

je vektorový prostor, jehož prvky, vektory, jsou uspořádané  $n$ -tice reálných čísel

$$(x_1, \dots, x_n).$$

**Definice.** Množina  $V_n$  všech uspořádaných  $n$ -tic reálných čísel, na které jsou definovány operace sčítání a násobení reálným číslem vztahy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \quad c\mathbf{a} = (c a_1, \dots, c a_n),$$

se nazývá aritmetický lineární prostor. Prvky  $V_n$ , tj. uspořádané  $n$ -tice reálných čísel, se nazývají aritmetické vektory.

**Definice 2.1.2.**

Vektory  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  nazýváme **lineárně nezávislé**, jestliže rovnice

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \mathbf{o} \quad (1)$$

je splněna pouze v případě, že skaláry  $c_1, \dots, c_n$  jsou všechny rovny 0. Jestliže je rovnice (1) splněna a alespoň jeden ze skalárů  $c_1, \dots, c_n$  je různý od nuly, říkáme, že vektory  $v_1, \dots, v_n$  jsou **lineárně závislé**.

**Příklad** Vektory  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$  a  $(1, 0, 0)$  jsou lineárně nezávislé. Najít čísla  $c_1, c_2, c_3$  splňující rovnici

$$c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0) = (c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2, c_1) = (0, 0, 0)$$

vede k řešení soustavy

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1 = 0,$$

která má jediné řešení  $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$ .

**Příklad** Vektory  $(1, 2, 4)$ ,  $(2, 1, 3)$  a  $(4, -1, 1)$  jsou lineárně závislé. Nalezení čísel  $c_1, c_2, c_3$  splňujících rovnici

$$c_1(1, 2, 4) + c_2(2, 1, 3) + c_3(4, -1, 1) = (c_1 + 2c_2 + 4c_3, 2c_1 + c_2 - c_3, 4c_1 + 3c_2 + c_3) = (0, 0, 0)$$

vede nyní k řešení soustavy rovnic

$$c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0,$$

$$2c_1 + c_2 - c_3 = 0,$$

$$4c_1 + 3c_2 + c_3 = 0,$$

která má například řešení  $c_1 = 2, c_2 = -3, c_3 = 1$ . Takových řešení je nekonečně mnoho tvaru  $c_1 = 2t, c_2 = -3t, c_3 = t, t \in \mathbf{R}$ .

**Definice 2.1.3.**

Vektorový prostor  $V$  se nazývá  **$n$ -dimenzionální** nebo také **prostor dimenze  $n$**  ( $n > 0$ ), existuje-li ve  $V$   $n$  lineárně nezávislých vektorů  $v_1, v_2, \dots, v_n$  a platí-li, že každý vektor  $z \in V$  lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů  $v_1, \dots, v_n$ .

**Definice 2.1.4.**

Každou množinu  $n$  lineárně nezávislých vektorů  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V_n$  nazýváme **bází** ve  $V_n$  a zapisujeme  $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ .

**Příklad** Určete souřadnice vektoru  $a = (1, 2)$  z  $V_2 = \mathbf{R}^2$

a) vzhledem k bázi  $\langle (1, 1), (-1, 0) \rangle$ ,

b) vzhledem k bázi  $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle$ .

**Definice 2.1.5.**

Jestliže  $V' \subset V$  a jsou splněny podmínky:

(1)  $kx \in V'$  pro všechna  $x \in V'$  a  $k \in \mathbf{R}$ ,

(2)  $x + y \in V'$  pro všechna  $x, y \in V'$ ,

pak  $V'$  nazveme vektorovým **podprostorem** vektorového prostoru  $V$ .

Jinak řečeno: pokud dva vektory patří do podprostoru  $V$ , pak jejich součet, rozdíl nebo násobek také musí patřit do podprostoru  $V$ .

**Příklad** Necht'  $V' = \{(x, 1); x \in \mathbf{R}\}$ , pak  $V'$  není podprostorem prostoru  $\mathbf{R}^2$ .

Platí:

(1)  $k(x, 1) = (kx, k) \notin V'$ , pro  $x \in \mathbf{R}$ ,

(2)  $(x, 1) + (y, 1) = (x + y, 2) \notin V'$ , pro  $x, y \in \mathbf{R}$ .

1. Určete aritmetický vektor  $x$ , pro který platí:
  - a)  $x = 3a + 5b - c$ , je-li  $a = (4, 1, 3, -2)$ ,  $b = (1, 2, -3, 2)$ ,  $c = (16, 9, 1, -3)$ ,
  - b)  $x = -a + 4b - 6c + 2d$ , je-li  $a = (1, 1, -1, -1)$ ,  $b = (0, 0, 0, 0)$ ,  $c = (\frac{1}{2}, 0, 1, 4)$ ,  
 $d = (-1, -1, 1, 1)$ ,
  
6. Najděte všechny hodnoty  $t$ , pro které je možno vektor  $u$  vyjádřit jako lineární kombinace vektorů  $a, b, c$ :
  - a)  $u = (5, 3, t)$ ,  $a = (1, 0, 2)$ ,  $b = (0, 1, 1)$ ,  $c = (4, 1, 9)$ ,
  - b)  $u = (4, 3, t)$ ,  $a = (1, 2, 3)$ ,  $b = (2, -1, 1)$ ,  $c = (1, 7, 8)$ ,
  - c)  $u = (t, 6, 7)$ ,  $a = (1, 4, 5)$ ,  $b = (3, 8, 10)$ ,  $c = (0, -4, -5)$ ,
  - d)  $u = (1, 3, 5)$ ,  $a = (1, 3, 4)$ ,  $b = (2, 8, -2)$ ,  $c = (3, 11, t)$ .
  
7. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé a v kladném případě vyjádřete jeden z nich jako lineární kombinaci ostatních:
  - a)  $a = (1, 2, 3)$ ,  $b = (3, 6, 7)$ ,
  - b)  $a = (4, -2, 6)$ ,  $b = (6, -3, 9)$ ,
  - c)  $a = (5, 4, 3)$ ,  $b = (3, 3, 2)$ ,  $c = (8, 1, 3)$ ,
  - d)  $a = (0, 1, 0, 3)$ ,  $b = (3, 0, 1, 0)$ ,  $c = (0, 3, 0, 1)$ .
  
8. Určete číslo  $t$  tak, aby vektory  $u, v, w$  byly lineárně závislé:
  - a)  $u = (2, 1, 3)$ ,  $v = (1, 2, -5)$ ,  $w = (3, 0, t)$ ,
  - b)  $u = (1, 2, 2)$ ,  $v = (2, t, 3)$ ,  $w = (2, 5, 4)$ ,
  - c)  $u = (-1, t, 2)$ ,  $v = (1, 1, 2)$ ,  $w = (3, 0, t)$ ,
  - d)  $u = (4, 5, 2)$ ,  $v = (2, 2t, t)$ ,  $w = (2, 10-6t, 4-3t)$ .
  
9. Nechť  $V$  je vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých v daném intervalu. Zjistěte, zda jsou funkce (vektory) v daném intervalu lineárně závislé nebo nezávislé:
  - a)  $a = e^x$ ,  $b = x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,
  - b)  $a = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$ ,  $c = x^2 + x - 2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ,
  - c)  $a = \sin x$ ,  $b = \cos x$ ,  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ ,
  - d)  $a = 2\cos^2 x$ ,  $b = -\cos 2x$ ,  $c = -1$ ,  $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ .

- 10.** Mezi danými vektory najděte maximální počet lineárně nezávislých a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci:
- a)  $a = (1, 2, 0, 0)$ ,  $b = (1, 2, 2, 4)$ ,  $c = (3, 6, 0, 0)$ ,
- b)  $a = (1, 2, 3)$ ,  $b = (2, 3, 4)$ ,  $c = (3, 2, 3)$ ,  $d = (4, 3, 4)$ ,  $e = (1, 1, 1)$ ,
- c)  $u = (1, 1, 0, 1)$ ,  $v = (2, 1, 1, -1)$ ,  $w = (1, -1, 0, -1)$ ,  $x = (1, 0, -1, 2)$ .
- 11.** Zjistěte, zda dané vektory tvoří bázi vektorového prostoru  $\mathbf{R}^3$ . V kladném případě vyjádřete vektor  $a = (1, 1, 2)$  jako jejich lineární kombinaci a stanovte souřadnice vektoru  $a$  v dané bázi:
- a)  $u_1 = (1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 1, 0)$ ,  $u_3 = (2, 0, 0)$ ,
- b)  $u_1 = (0, 1, -1)$ ,  $u_2 = (0, 2, -2)$ ,  $u_3 = (1, 1, 3)$ ,

Řešení některých úloh:

- 6.** a)  $t = 13$ , b)  $t = 7$ , c) pro žádné  $t$ , d)  $t \neq 2$ .
- 7.** a) nezávislé, b) závislé,  $b = \frac{3}{2}a$ , c) závislé,  $c = 7a - 9b$ , d) nezávislé.
- 8.** a)  $t = 11$ , b) neexistuje, c)  $t_1 = 2$ ,  $t_2 = 3$ , d)  $t$  libovolné.
- 9.** a) nezávislé, b) závislé, např.  $2a - 3b - c = 0$ , c) nezávislé, d) závislé, např.  $a + b + c = 0$ .
- 10.** a)  $a, b; c = 3a + 0b$  nebo  $b, c; a = 0b + \frac{1}{3}c$ , b) mimo trojic  $a, b, e; c, d, e$  jsou libovolné tři trojice lineárně nezávislé. Např.  $a, b, c; d = -a + b + c$ ,  $e = -a + b + 0c$ , c) např.  $u, v, w; x = 2u - v + w$ .
- 11.** a) ano,  $a = 2u_1 - u_2$ ,  $a$  má souřadnice  $(2, -1, 0)$ , b) ne, c) ano,  $a = u_1 - u_2 + \frac{2}{3}u_3$ ,  $a$  má souřadnice  $(1, -1, \frac{2}{3})$ .

Příklad. Mějme vektory  $\mathbf{a}_1 = (0, 2, 7)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (0, 3, 2)$  a  $\mathbf{a}_3 = (1, 3, 2)$  z aritmetického lineárního prostoru  $V_3$ . Máme rozhodnout, zda vektor  $\mathbf{a}_3$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ .

### Aritmetické vektory:

- Rozhodněte, zda jsou následující skupiny vektorů z prostoru  $\mathbb{R}^4$  lineárně závislé nebo nezávislé:
  - $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1)$
  - $\mathbf{o} = (0, 0, 0, 0)$
  - $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, -4, 3)$
  - $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, -4, 3)$ ,  $\mathbf{c} = (3, 4, -8, 7)$
  - $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, -4, 3)$ ,  $\mathbf{d} = (1, -2, -1, 0)$
  - $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, -4, 3)$ ,  $\mathbf{o} = (0, 0, 0, 0)$
  - $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, -4, 3)$ ,  $\mathbf{d} = (1, -2, -1, 0)$ ,  $\mathbf{e} = (2, 1, -1, 7)$
  - $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, -4, 3)$ ,  $\mathbf{d} = (1, -2, -1, 0)$ ,  $\mathbf{e} = (2, 1, -1, 7)$ ,  $\mathbf{f} = (9, 8, 7, 4)$
- V prostoru  $\mathbb{R}^3$  vyjádřete vektor  $\mathbf{w} = (5, 4, 7)$  jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{y} = (1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{z} = (0, 0, 1)$ .
- V prostoru  $\mathbb{R}^3$  vyjádřete vektor  $\mathbf{p} = (0, 1, 3)$  jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{m} = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{n} = (-1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{p} = (0, 1, 2)$ .
- V prostoru  $\mathbb{R}^4$  vyjádřete vektor  $\mathbf{q} = (2, 1, 1, 0)$  jako lineární kombinaci vektorů  $\mathbf{r} = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{s} = (0, 1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{t} = (1, 0, 0, 0)$ .