MA2-E (4. hodina)

Gaussova eliminace

24. Gaussovu metodou řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x+3y&=9 \\ x-y&=2 \end{aligned}$$

Věta 2.5.2. **(Frobeniova).** Soustava rovnic $\mathbf{A}\,.\,\mathbf{X}=\mathbf{B}$ má řešení, právě když $h(\mathbf{A})=h(\mathbf{A}|\mathbf{B})$. Označíme-li $h(\mathbf{A})=h(\mathbf{A}|\mathbf{B})=r$ a $\mathbf{A}$ je typu (m, n), pak v případě r = n (n počet neznámých) má soustava jediné řešení a v případě $n > r$ má soustava nekonečně mnoho řešení, která můžeme zapsat pomocí (n - r) parametrů.

Důkaz je obtížný a nebudeme jej provádět.

Lidově řečeno: pokud se vám objeví řádek: $(0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0|c)$ kde $c \neq 0$, soustava nemá řešení. Ve všech ostatních případech má alespoň jedno řešení.

Pokud je hodnost matice ostře menší, než počet neznámých, existuje nekonečně mnoho řešení (obvykle jednu nebo několik neznámých volíme libovolně a zbylé pak dopočítáme). Pokud je hodnost matice rovna počtu neznámých existuje jedno unikátní řešení soustavy.

Gaussova eliminace:

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14\,. \end{aligned}$$

A	**B**	Σ	úpravy
1 1 5	−7	0	
1 3 1	5	10	$r_2 - r_1$
2 1 1	2	6	$r_3 - 2r_1$
2 3 −3	14	16	$r_4 - 2r_1$
1 1 5	−7	0	
0 2 −4	12	10	
0 −1 −9	16	6	$2r_3 + r_2$
0 1 −13	28	16	$2r_4 - r_2$
1 1 5	−7	0	
0 2 −4	12	10	
0 0 −22	44	22	
0 0 −22	44	22	$r_4 - r_3$
1 1 5	−7	0	
0 2 −4	12	10	
0 0 −22	44	22	
0 0 0	0	0	

https://www.priklady.eu/cs/matematika/matice.alej

25. Řešte soustavu rovnic Gaussovu metodou:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= 8 \\ x - 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

26. Řešte soustavu rovnic Gaussovu metodou:

$x + 2y + 3z = 0$
$2x - y + z = 3$
$3x + y - z = 5$

27. Řešte soustavu rovnic Gaussovu metodou:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

1. Řešte různými způsoby soustavy lineárních rovnic

a) $\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ x - y &= 7 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} 2x - 6y &= 4 \\ 3x - 9y &= 1 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} 5x - y + 2z &= 4 \\ 3x + 5y - z &= 9 \\ -4x + 2y + 3z &= -17 \end{aligned}$,

d) $\begin{aligned} 4x - 2y + 6z &= -4 \\ 7x + 5y - 2z &= 14 \\ 2x - 8y + 5z &= -11 \\ -3x - 3y - 7z &= 1 \end{aligned}$, e) $\begin{aligned} 6x - 3y &= 24 \\ 4y - 7z &= -13 \\ 5x + 6z &= 43 \end{aligned}$,

f) $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 &= 9 \end{aligned}$, g) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= -12 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 &= 9 \end{aligned}$,

Řešení:

1. **a)** (2, -5), **b)** nemá řešení, **c)** (2, 0, -3), **d)** (1, 1, -1), **e)** (5, 2, 3), **f)** (1, 5, -3), g) (3, 4, 5), **h)** nemá řešení.

1)

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 6x_1+2x_2-\ \ x_3+7x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2-3x_3+5x_4 &= -4\\ x_1+\ \ x_2-\ \ x_3-\ \ x_4 &= 0\\ x_1\qquad\quad +\ \ x_3\qquad\quad &= 3 \end{aligned}$$

2)

Řešte soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+6x_3+2x_4-4x_5 &= 5\\ x_1\qquad\quad +2x_3-\ \ x_4+2x_5 &= 3\\ x_1+2x_2+2x_3\qquad\qquad\qquad &= 1\\ 2x_1-6x_2+4x_3+2x_4-4x_5 &= 5 \end{aligned}$$

3)

Řešte soustavu
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 &= 1\\ x_1+2x_2+\ \ x_3-2x_4 &= 1\\ 3x_1+4x_2-\ \ x_3+2x_4 &= 5\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení:

1)

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

2)

$$A_r \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

3)

$$A_r \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\
2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & - & 7x_5 & = & 0\,.
\end{array}
$$

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\
2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1\,.
\end{array}
$$

Řešení:

1)

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\
 & & & & & & 9x_4 & - & 3x_5 & = & 0
\end{array}
$$

2)

Po provedení úprav platí $h(\mathbf{A'}) = 3$ a $h(\mathbf{A'}|\mathbf{B'}) = 4$. Podle Frobeniovy věty nemá soustava řešení.