

## 6. hodina (MA2-E)

### 1) Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m, \end{aligned} \quad (1)$$

Jestliže zavedeme matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

lze soustavu (1) psát ve tvaru  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ .

Matice  $\mathbf{A}$  se nazývá **matice soustavy**

Možné řešení:

Vynásobíme rovnici  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$  zleva maticí  $\mathbf{A}^{-1}$  a dostaneme  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$  a tedy  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$ .

**Příklad** Řešme soustavu pomocí inverzní matice.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -7 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -11. \end{aligned}$$

**Řešení:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -2 & 11 & -5 \\ -4 & -10 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -2 & 11 & -5 \\ -4 & -10 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 32 \\ 80 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

19. Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic:

$$2x - y = 3$$

$$\underline{x + y = 12}$$

---

20. Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic:

$$y - z = -1$$

$$2x - y + 2z = 6$$

$$\underline{4x - 4y + 5z = 11}$$

## 2) Determinanty

### Definice 2.3.1.

**Determinantem** (řádu  $n$ ) **čtvercové matice**  $\mathbf{A}$  řádu  $n$ , jejímiž prvky  $a_{ij}$  jsou reálná (popř. komplexní) čísla, nazýváme *číslo*, které značíme  $\det \mathbf{A}$ ;  $|\mathbf{A}|$  a definujeme takto:

1. Je-li  $n = 1$ , pak  $\det \mathbf{A} = a_{11}$ .
2. Pro  $n \geq 2$  je

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \mathbf{A}_{1j} =$$
$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

kde matice  $\mathbf{A}_{1j}$  vznikne z matice  $\mathbf{A}$  vynecháním prvního řádku a  $j$ -tého sloupce.

Determinant můžete spočítat podle libovolného řádku nebo sloupce. Výše je ukázán výpočet podle prvního řádku. Řádek nebo sloupec volíme tak, aby byl výpočet co nejsnazší (hodně nul). Před výpočtem také můžeme matici upravit tak, aby byl výpočet jednodušší. Tyto úpravy nesmí ale změnit hodnotu determinantu. Tuto podmínku splňuje například odečtení nebo přičtení libovolného násobku jednoho řádku ke druhému.

Pokud se nám podaří upravit čtvercovou matici na trojúhelníkový tvar, pak výpočet determinantu lze redukovat na součin čísel na hlavní diagonále (ověřte si to u matice 3 krát 3).

Pokud však jeden řádek vynásobíte nenulovým číslem (např. dvěma) vynásobíte tímto číslem i hodnotu determinantu (zvětší se dvakrát). Tyto úpravy můžete použít, ale na závěr musíte provést korekci (výsledný determinant vydělit dvěma).

1. Pro matici  $\mathbf{A}$  řádu  $n = 2$  platí

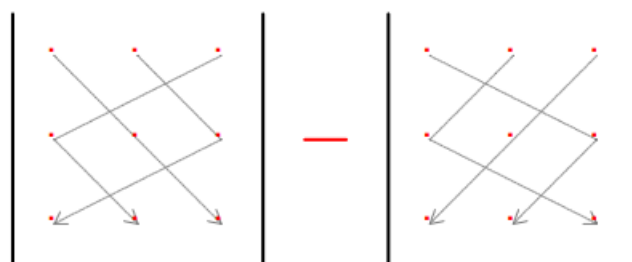
$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

**Příklad** Vypočtěte determinant matice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

2. Pro matici  $\mathbf{A}$  řádu  $n = 3$  platí

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}). \end{aligned}$$

Tento výpočet si snadno zapamatujeme podle tzv. *Sarrusova pravidla*:



**Příklad** Vypočtete determinant matice  $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ .

**Příklad** Vypočtete determinant matice  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Úpravy, které mění hodnotu determinantu určitým způsobem:

**Věta 2.3.2.** Jestliže matice  $\mathbf{B}$  vznikne tak, že některý řádek (sloupec) čtvercové matice  $\mathbf{A}$  vynásobíme číslem  $k \in \mathbf{R}$ , pak platí  $\det \mathbf{B} = k \cdot \det \mathbf{A}$ .

**Věta 2.3.3.** Vyměníme-li ve čtvercové matici  $\mathbf{A}$  navzájem dva řádky (sloupce), pak pro takto vzniklou matici  $\mathbf{B}$  platí:  $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$ .

Další fakta:

**Věta 2.3.4.** Má-li matice  $\mathbf{A}$  dva řádky (sloupce) stejné, pak  $\det \mathbf{A} = 0$ .

*Důkaz* plyne z předcházející věty 3, když oba stejné řádky mezi sebou vyměníme. Dostaneme

$$\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A} \Rightarrow 2 \det \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0.$$

**Věta 2.3.5.** Nechť matice  $\mathbf{B}$  vznikne tak, že k  $p$ -tému řádku (sloupci) čtvercové matice  $\mathbf{A}$  řádu  $n$  přičteme  $k$  násobek,  $k \in \mathbf{R}$ ,  $q$ -tého řádku (sloupce),  $p \neq q$ . Pak platí

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}.$$

**Příklad** Vypočtete determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Řešení:**

Výhodné bude využít rozvoj podle 4. sloupce. Nejdříve 2. řádek násobený číslem  $(-3)$  přičteme k řádku třetímu a 2. řádek přičteme k řádku čtvrtému. První a druhý řádek opíšeme:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -7 & -5 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nyní provedeme rozvoj podle 4. sloupce :

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tento determinant můžeme vypočítat přímo Sarrusovým pravidlem nebo opět rozvojem podle 3. sloupce po úpravách.

1. Vypočtete determinanty:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}, & \text{b)} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}, & \text{c)} & \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, & \text{d)} & \begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{24} & \sqrt{15} \end{vmatrix}, & \text{e)} & \begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{6} \end{vmatrix} \\ \text{f)} & \begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a-2 \end{vmatrix}, & \text{g)} & \begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & -1 \\ 1 & \operatorname{tg} x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

2. Vypočtete determinanty pomocí Sarrusova pravidla:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}, & \text{b)} & \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}, & \text{c)} & \begin{vmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, & \text{d)} & \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \\ \text{e)} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}, & \text{f)} & \begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

4. Vypočtete determinanty úpravou na trojúhelníkový tvar:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, & \text{b)} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, & \text{c)} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

5. Vypočtete determinanty:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}, & \text{b)} & \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}, & \text{c)} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}, \\ \text{d)} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, & \text{e)} & \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & 8 \\ -3 & -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}, & \text{f)} & \begin{vmatrix} -4 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & -2 \\ -9 & 6 & 2 & -5 \\ 8 & -6 & 10 & -12 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

1. a) -17, b) 10, c) 22, d)  $\sqrt{3}$ , e)  $\frac{9}{2}$ , f)  $(1 - 2a)$ , g)  $\frac{1}{\cos^2 x}$ .
2. a) -8, b) 50, c) -18, d) -43, e) -125, f)  $(-x^2 + x)$ .
4. a) 1, b) 0, c) -6.
5. a) 10, b) 6, c) 1, d) 1, e) -40, f) 24.

### 3) Výpočet inverzní matice pomocí determinantu

1. Determinant matice  $\mathbf{A}_{ij}$  nazýváme *subdeterminantem* vzhledem k prvku  $a_{ij}$ .
2. Součin  $(-1)^{i+j} \cdot \det \mathbf{A}_{ij}$  nazýváme *algebraickým doplňkem* prvku  $a_{ij}$  a značíme

#### **Věta 2.4.1.**

Nechť  $\mathbf{A}$  je regulární matice řádu  $n \geq 2$  a  $\mathbf{A}^*$  je matice utvořená z algebraických doplňků

$\mathbf{A}_{ik}^*$  prvků  $a_{ik} \in \mathbf{A}$ . Pak platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A}^*)^T.$$

Matici  $(\mathbf{A}^*)^T$  nazýváme *adjungovanou* maticí k matici  $\mathbf{A}$  a značíme ji  $\tilde{\mathbf{A}}$ , tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}.$$

**Příklad** Určeme inverzní matici k matici  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

**Řešení:**

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{matice } \mathbf{A} \text{ je regulární}$$

$$\mathbf{A}_{11}^* = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 18 \quad \mathbf{A}_{12}^* = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -24 \quad \mathbf{A}_{13}^* = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$\mathbf{A}_{21}^* = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 \quad \mathbf{A}_{22}^* = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 \quad \mathbf{A}_{23}^* = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\mathbf{A}_{31}^* = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad \mathbf{A}_{32}^* = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad \mathbf{A}_{33}^* = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 18 & -24 & 6 \\ -10 & 15 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^T = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Vypočítejte inverzní matici  $\mathbf{A}^{-1}$  k matici  $\mathbf{A}$  a proveďte zkoušku:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{g) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{h) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{i) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{j) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



2. Řešte rovnici pro neznámou matici  $\mathbf{X}$ :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -16 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -24 & 3 \\ -44 & 15 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$1. \text{ a) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{A}^{-1} \text{ neexistuje (det } \mathbf{A} = 0), \quad \text{e) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\text{g) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{h) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{i) } \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$2. \text{ a) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbf{X} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 18 & -7 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}.$$

#### 4) Cramerovo pravidlo pro řešení soustavy rovnic

[https://cs.wikipedia.org/wiki/Cramerovo\\_pravidlo](https://cs.wikipedia.org/wiki/Cramerovo_pravidlo)

U matice 2 krát 2:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$$

$$(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right)$$

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \text{ a}$$

$$x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Analogicky u vyšších matic.

[Determinant – vyřešené příklady](#)

**17.** Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$2x + y + 3z = 9$$

$$x - 2y + z = -2$$

$$\underline{\underline{3x + 2y + 2z = 7}}$$

2)

$$2x + y - z = 3$$

$$x - 2y + 3z = 5$$

$$3x + y + 2z = 4$$

Řešení:

$$x = \frac{16}{7}, \quad y = -2, \quad z = -\frac{3}{7}$$

**Příklad 34.** *Je dána soustava čtyř rovnic o čtyřech neznámých:*

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$$

*Užitím Cramerova pravidla určete hodnotu neznámé  $x_3$ .*