# 7. hodina (MA2-E)

## 1) Výpočet inverzní matice pomocí determinantu

1. *Determinant matice $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme subdeterminantem vzhledem k prvku $a_{ij}$.*
2. *Součin $(-1)^{i+j}$. det $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme **algebraickým doplňkem** prvku $a_{ij}$ a značíme*

**Věta 2.4.1.**

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu $n \geq 2$ a $\mathbf{A}^*$ je matice utvořená z algebraických doplňků $\mathbf{A}^*_{ik}$ prvků $a_{ik} \in \mathbf{A}$. Pak platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \,.\, (\mathbf{A}^*)^T.$$

Matici $(\mathbf{A}^*)^T$ nazýváme ***adjungovanou*** maticí k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\tilde{\mathbf{A}}$, tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \,.\, \tilde{\mathbf{A}}.$$

**Příklad** Určeme inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

**Řešení:**

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{matice } \mathbf{A} \text{ je regulární}$$

$$\mathbf{A}^*_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 18 \qquad \mathbf{A}^*_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -24 \qquad \mathbf{A}^*_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$\mathbf{A}^*_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad \mathbf{A}^*_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 \qquad \mathbf{A}^*_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\mathbf{A}^*_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \mathbf{A}^*_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \mathbf{A}^*_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 18 & -24 & 6 \\ -10 & 15 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

**1.** Vypočítejte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ a proveďte zkoušku:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**2.** Řešte rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -24 & 3 \\ -44 & 15 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

**1.** a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}^{-1}$ neexistuje (det $\mathbf{A} = 0$), e) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

**2.** a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{X} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & -7 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}$.

***2) Cramerovo pravidlo pro řešení soustavy rovnic***

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cramerovo_pravidlo

U matice 2 krát 2:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

$$(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

$$x_1 = \frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \text{ a}$$

$$x_2 = \frac{\det \boldsymbol{A}_2}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Analogicky u vyšších matic.

Determinant – vyřešené příklady

**17.** Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 9 \\ x - 2y + z &= -2 \\ 3x + 2y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

**2)**

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x - 2y + 3z &= 5 \\ 3x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

Řešení:

$$x = \frac{16}{7}, \quad y = -2, \quad z = -\frac{3}{7}$$

**Příklad 34.** *Je dána soustava čtyř rovnic o čtyřech neznámých:*

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

*Užitím Cramerova pravidla určete hodnotu neznámé* $x_3$.

## *Vlastní číslo a vlastní vektor*

**Definice 2.6.1.**

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice řádu n, kde $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ se nazývá **vlastní** nebo **charakteristické číslo** matice $\mathbf{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ tak, že

$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ se nazývá **vlastní** nebo **charakteristický vektor** příslušný k $\lambda$.

**Příklad** Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pak

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\,\mathbf{x}.$$

To znamená, že $\lambda = 3$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x} = (2, 1)^T$ je vlastní vektor příslušný k $\lambda =$ $= 3$. Zřejmě také každý nenulový násobek vektoru $\mathbf{x}$ je vlastním vektorem

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{x}, \qquad (1)$$

Rovnici (1) můžeme zapsat ve tvaru

$$(\mathbf{A} - \lambda\, \mathbf{E})\, \mathbf{x} = \mathbf{o},$$

což představuje soustavu homogenních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} (a_{11} - \lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22} - \lambda)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0 \end{array},$$

která má netriviální řešení, právě když $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Vypočteme-li předchozí determinant, získáme polynom $p(\lambda)$ stupně n. Tento polynom se nazývá ***charakteristickým polynomem*** a rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, ***charakteristickou rovnicí*** matice $\mathbf{A}$. Řešením rovnice $p(\lambda) = 0$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Tak dostaneme n, ne nutně různých, vlastních čísel matice $\mathbf{A}$.

**Příklad** Určeme vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Řešení:**

Charakteristická rovnice má tvar $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Dostaneme $(2 - \lambda)(-2 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 - (-2 - \lambda) + 6(2 - \lambda) = 0$, t.j.

$$-\lambda(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Nalezení vlastních vektorů příslušných k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ pak vede k řešení soustavy rovnic

$$(\mathbf{A} - 0 .\, \mathbf{E})\, \mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-0 & 3 & 1 \\ 1 & -2-0 & 1 \\ 1 & -3 & 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0\,. \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Použitím Gaussovy eliminační metody zjistíme, že ekvivalentní soustava má tvar

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_1 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Položíme $x_3 = t$ a dostaneme $x_1 = x_2 = x_3 = t$. Řešení soustavy je tedy tvaru $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$, $t \in \mathbf{C}$.

Podobně pro vlastní číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ budeme řešit soustavu

$$(\mathbf{A} - 1.\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 1 & -2-1 & 1 \\ 1 & -3 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

atd.

**Příklady:**

**1.** Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, k) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

l) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Určete vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

**Řešení:**

**1.** a) $\lambda_1 = 5$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x} = (t, -2t)^T$, b) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x} = (4t, 3t)^T$; $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$,
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$, d) $\lambda_1 = 3 + 4i$, $\mathbf{x} = (2it, t)^T$; $\lambda_2 = 3 - 4i$, $\mathbf{x} = (-2it, t)^T$,
e) $\lambda_1 = 2 + i$, $\mathbf{x} = (t, (1 + i)t)^T$; $\lambda_2 = 2 - i$, $\mathbf{x} = (t, (1 - i)t)^T$, f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

$\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$, g) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t, 0)^T$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\mathbf{x} = (r, s, -s)^T$, h) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$; $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$; $\lambda_3 = -2$, $\mathbf{x} = (-t, -t, 5t)^T$, i) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (7t, 3t, t)^T$; $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x} = (3t, 2t, t)^T$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$, j) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\mathbf{x} = (t, 0, t)^T$, k) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (r, s, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$; $\lambda_4 = 4$, $\mathbf{x} = (0, 0, 0, t)^T$; l) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x} = (t, 2t, 0, 0)^T$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x} = (0, t, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$,
vždy pro $r, s, t \in \mathbf{C}$.

Další příklady:

**1.** Řešte různými způsoby soustavy lineárních rovnic (Cramerovým pravidlem, pomocí inverzní matice a Gaussovou eliminací):

a) $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 7 \end{array}$, b) $\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 6y & = & 4 \\ 3x & - & 9y & = & 1 \end{array}$, c) $\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & y & + & 2z & = & 4 \\ 3x & + & 5y & - & z & = & 9 \\ -4x & + & 2y & + & 3z & = & -17 \end{array}$,

d) $\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 2y & + & 6z & = & -4 \\ 7x & + & 5y & - & 2z & = & 14 \\ 2x & - & 8y & + & 5z & = & -11 \\ -3x & - & 3y & - & 7z & = & 1 \end{array}$, e) $\begin{array}{rcrcrcr} 6x & - & 3y & & & = & 24 \\ & & 4y & - & 7z & = & -13 \\ 5x & & & + & 6z & = & 43 \end{array}$,

f) $\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -7 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{array}$, g) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & -12 \\ 5x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 9 \end{array}$,

**2.** Řešte soustavy lineárních rovnic:

a) $\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$ , b) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 2 \end{array}$ ,

c) $\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$ , d) $\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$ ,

Řešení:

**1.** **a)** (2, -5), **b)** nemá řešení, **c)** (2, 0, -3), **d)** (1, 1, -1), **e)** (5, 2, 3), **f)** (1, 5, -3), g) (3, 4, 5), **h)** nemá řešení.

**2.** **a)** $\left(\frac{6-8t}{5}, \frac{7t-4}{10}, t\right)$, **b)** (t+2, 2t, t), **c)** nemá řešení, **d)** $\left(\frac{5+t}{2}, 1+3t, \frac{-1-7t}{2}, t\right)$,

**e)** (r, 5r-4s-9, s, 7-3r+3s), **f)** (4-r, 5-r, r), **g)** (3-6t, 2-t, t), h) nemá řešení,