8. hodina ***(MA2-E)***

Kombinatorika

1.2 Variace

Variatio delectat — latinské přísloví, které říká, že změna těší. Pro kombinatoriku je výstižnější překlad „variace těší".

V kombinatorice se často setkáváme s k-člennými skupinami utvořenými z daných n prvků tak, že v nich záleží na pořadí a žádný z daných prvků se v nich neopakuje. Ptáme-li se třeba, kolika možnými způsoby může být mezi osm finalistů olympijského sprintu na 100 m rozdělena zlatá, stříbrná a bronzová medaile, ptáme se vlastně na to, kolika způsoby lze z daných osmi atletů utvořit uspořádanou trojici. Uspořádanou trojicí v tomto případě rozumíme trojici, v níž záleží na tom, kdo z jejích členů dostane zlatou, kdo stříbrnou a kdo bronzovou medaili. Takovéto skupiny se nazývají variace, přesněji k-členné variace z n prvků.

uspořádaná k-tice:	1. člen	2. člen	…	$(k-1)$-ní člen	k-tý člen
	↑	↑		↑	↑
možnosti výběru z n prvků:	n	$n-1$		$n-(k-2)$	$n-(k-1)$

Podle kombinatorického pravidla součinu je počet všech těchto uspořádaných k-tic roven součinu

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Počet $V(k,n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$V(k,n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Příklad 6.2.1. Zapište variace bez opakování 2.třídy a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1,2,3\}$.

Řešení: $V_2(3)$: $(1,2), (1,3), (2,3), (2,1), (3,1), (3,2)$,

$$V_2(3) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6.$$

Příklad 6.2.2. Jsou dány cifry 1, 2, 3, 4, 5. Kolik trojciferných čísel lze z nich sestavit, jestliže se cifry neopakují ?

Příklad 1

K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

a) Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.
b) Kolik z nich má modrý pruh?
c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed?
d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh?

Příklad 1.1.2. Na startu běžeckého závodu je 8 atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

1.3 Permutace

Klasický příklad permutací několika slabik pochází od Jana Wericha: On byl denegere, degenere, derenege, zkrátka . . .

V předcházejícím článku jsme se zabývali k-člennými variacemi z n prvků, tj. uspořádanými k-ticemi, v nichž se každý z daných n prvků vyskytuje nejvýše jednou; pro přirozená čísla k, n přitom platí $k \leq n$, neboť pro $k > n$ nelze z daných n prvků utvořit žádnou uspořádanou k-tici, v níž by se žádný prvek neopakoval. V tomto článku se budeme zabývat uspořádanými n-ticemi sestavenými z daných n prvků, tj. případem $k = n$; takovéto skupiny se nazývají **permutace** (**pořadí**).

Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.

Permutace z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

Počet permutací *n* prvků bez opakování

$P(n) = n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$

Pro každé přirozené číslo n definujeme:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$0! = 1$$

Příklad 6.3.1. Zapište permutace bez opakování a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$.

Příklad 6.3.2. Kolik přesmyček lze vytvořit použitím všech písmen slova fyzika?

Příklad 1

S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentě vystoupit šest poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet:

a) všech možných pořadí jejich vystoupení;

b) všech pořadí, v nichž vystupuje A po E;

c) všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po E.

1.4 Kombinace

Alpská kombinace se skládá ze sjezdu, slalomu a obřího slalomu, severská z běhu na 15 km a skoku na můstku s normovým bodem 60–70 metrů.

Až dosud jsme se zabývali skupinami vybranými z daných prvků, ve kterých záleželo na pořadí, tj. k-ticemi uspořádanými. Nyní nám půjde o skupiny, ve kterých na pořadí nezáleží; přitom — stejně jako v předchozích případech — budeme požadovat, aby v těchto skupinách byl každý z daných n prvků nejvýše jednou, tj. aby se v nich žádný prvek neopakoval. Chceme-li např. vědět, kolik bude sehráno utkání

Kombinací bez opakování k-té třídy z n prvků nazýváme každou k prvkovou podmnožinu základní množiny M, v níž nezáleží na pořadí prvků.

Počet kombinací bez opakování: $C_k(n) = \binom{n}{k}$, $0 \le k \le n$, $(k, n \in \mathbf{N})$.

Příklad 6.4.1. Zapište kombinace 2. třídy bez opakováním a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1,2,3\}$.

1. Vypočtěte kombinační čísla

a) $\binom{24}{0}$, b) $\binom{12}{12}$, c) $\binom{15}{1}$, d) $\binom{9}{2} + \binom{9}{3}$.

Příklad 1

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat

a) trojici políček;
b) trojici políček neležících v témže sloupci;
c) trojici políček neležících v témže sloupci ani v téže řadě;
d) trojici políček, která nejsou všechna téže barvy.

Příklad 2

Určete, kolika způsoby je možno ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou a) právě dvě ženy; b) aspoň dvě ženy.

Příklad 3

V rovině je dáno n bodů, z nichž p leží na jedné přímce; kromě nich žádné tři body na téže přímce neleží. Určete, kolik je těmito body určeno a) přímek; b) trojúhelníků; c) kružnic.

1.5 Variace s opakováním

Variace na dané téma bývají často variacemi s opakováním

Na skupiny, které jsme studovali v předešlých článcích, jsme kladli požadavek, aby každý z daných prvků se v každé této skupině vyskytoval nejvýše jednou. Nyní od tohoto požadavku upustíme — budeme se zabývat skupinami, v nichž se mohou jednotlivé prvky opakovat; znamená to, že v každé k-tici vybrané z daných n prvků může být každý z nich obsažen až k-krát. Pokud v těchto k-ticích záleží na uspořádání, mluvíme o k-členných variacích s opakováním, přesněji o k-členných variacích s opakováním z n prvků.

Počet $V'(k,n)$ všech k-členných variací s opakováním z n prvků je

$$V'(k,n) = n^k.$$

Příklad 2

Určete počet všech podmnožin k-prvkové množiny.

Příklad 3

Určete počet všech nejvýše pěticiferných přirozených čísel. Kolik z nich je menších než 50 000? (Srovnej s příkladem 2, článek 1.2.)

1.6 Permutace s opakováním

Anagram je uskupení písmen, které uznikne přemístěním písmen slova nebo věty, jejíž obsah chceme utajit.
V anagramu AABIIKKMNOORT resp. MINIKABAROTOK je ukryt název této kapitoly (viz úlohu 1.62).

V článku 1.3 jsme se zabývali permutacemi z n prvků, tj. uspořádanými n-ticemi, v nichž je každý z daných n prvků zastoupen právě jednou. Zkoumejme nyní uspořádané skupiny, v nichž je každý z daných n prvků — označme je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — zastoupen aspoň jednou, a to v předem určeném počtu: k_1-krát prvek a_1, k_2-krát prvek a_2, …, k_n-krát prvek a_n. Vypišme pro ilustraci všechny tyto uspořádané sku-

Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

Počet $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \ldots, k_n$-krát, je

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}.$$

Příklad 6.3.3. Zapište permutace s opakováním a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$ a první prvek se opakuje jednou, druhý se opakuje jednou a třetí dvakrát.

Příklad 6.3.4. Kolik přesmyček lze vytvořit použitím všech písmen slova matematika?

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ bývá označováno termínem **binomický koeficient**, je-li užíváno ve vztahu pro n-tou mocninu dvojčlenu (binomu).

Jsou-li a,b libovolná čísla a n číslo přirozené, platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

Rozveďte pomocí binomické věty a zjednodušte $(1+\sqrt{2})^4$.

Který člen rozvoje výrazu $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$, $x \neq 0$, neobsahuje x?

9. Užitím binomické věty vypočtěte

a) $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)^6$,

b) $(1{,}01)^7$ s přesností na tři desetinná místa.

10. Vypočtěte: a) $\binom{7}{2}$, b) $\binom{15}{12}$, c) $\binom{x}{3}$.

11. Kterým kombinačním číslem je možno vyjádřit součty:

a) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$, b) $\binom{14}{3} + \binom{14}{10}$, c) $\binom{n}{4} + \binom{n}{5}$.

Řešení některých úloh:

1. a) 1; b) 1; c)15; d) 120. **2**. a) $x \geq 3; x = 5$; b) $x \geq 1; x = 2$. **3.** 12650. **4.** 120. **5.** 120.
6. 216. **7.** 12. **8.** 720. **9.** a) $\frac{a^6}{64} - \frac{a^5b}{16} + \frac{5a^4b^2}{48} - \frac{5a^3b^3}{54} + \frac{5a^2b^4}{108} - \frac{ab^5}{81} + \frac{b^6}{729}$; b) 1,072.
10. a) 21; b) 455; c) $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6}$. **11**. a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{15}{4}$; c) $\binom{n+1}{5}$. **12.** a) $(n+1)n$;
b) $\frac{1}{n-1}$; c) 1. **13.** $n = 7$. **14.** $n = 2$. **15.** $n = 8$. **16.** a) 120; b) 24; c) 48; d) 72.