

MA2-E (3. hodina)

Matice (hodnost a násobení matic)

Definice. Jsou dány dvě matice A, B stejného typu $m \times n$ a reálné číslo r . Definujeme následující početní *operace* (úkony):

součet matic	$A + B$	prvky výsledku se vypočtou jako $a_{ij} + b_{ij}$
rozdíl matic	$A - B$	prvky výsledku se vypočtou jako $a_{ij} - b_{ij}$
r -násobek matice	$r \cdot A$	prvky výsledku se vypočtou jako $r \cdot a_{ij}$
matice <i>transponovaná</i>	A^T	výsledkem je matice typu $n \times m$, kde $a^T_{ij} = a_{ji}$

Ukázky: Pro matice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ bude

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3.2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0.8 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad 2A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Sečtěte matice $A + B$ a $M + N$ jestliže platí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice

Definice 2.4.3.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n) . Považujme řádky za aritmetické vektory vektorového prostoru V_n . **Hodnost matice** $\mathbf{A}$ je r (značíme $h(\mathbf{A}) = r$), existuje-li r lineárně nezávislých řádků matice $\mathbf{A}$ a každých $r+1$ řádků je lineárně závislých.

Věta 2.4.2. Necht' $\mathbf{A}$ je libovolná matice typu (m, n) . Hodnost matice $\mathbf{A}$ se nezmění při kterékoliv z následujících elementárních úprav:

1. záměně pořadí řádků (sloupců),
2. násobení jednotlivých řádků (sloupců) čísly $k_i \neq 0$,
3. přičtení k některému řádku (sloupci) lineární kombinace zbývajících řádků (sloupců),
4. vynecháním řádku, který je lineární kombinací zbývajících řádků.

Důkaz: Žádná z uvedených úprav nemění počet lineárně nezávislých řádků či sloupců.

Hodnost matice určíme (například) tak, že upravíme matici na **trojúhelníkový tvar** (v každém následujícím řádku je zleva alespoň o jednu nulu více než v předchozím). Počet nenulových řádků je roven hodnosti.

Příklad Určeme hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Budeme upravovat matici $\mathbf{A}$ podle věty 2. Ke 2. řádku přičteme (-1) násobek 1. řádku a ke 4. řádku (-2) násobek 1. řádku

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{.(-1) \\ \leftarrow \\ .(-2) \\ \leftarrow}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

3. a 4. řádek můžeme vynechat (dle 4. bodu věty 2).

Je vidět, že v upravené matici jsou dva lineárně nezávislé řádky, tzn., že hodnost matice $\mathbf{A}$ je dvě, $h(\mathbf{A}) = 2$.

4. Vypočtěte hodnost matice:

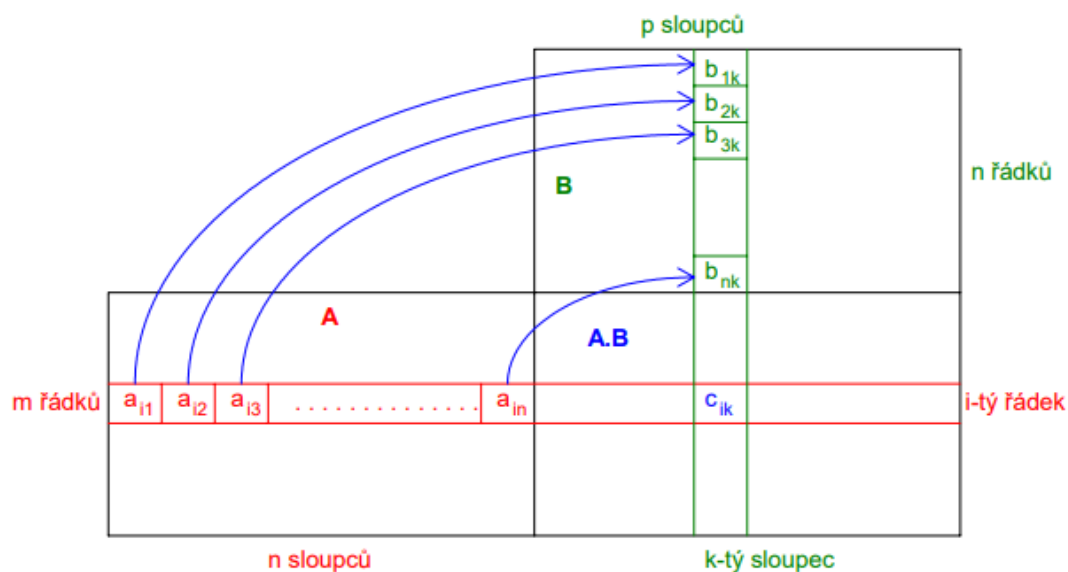
$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ -7 & 10 & -20 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \\ 5 & -10 & 15 \end{pmatrix}, \quad \text{e) } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$4. \quad \text{a) } h(\mathbf{A}) = 2, \quad \text{b) } h(\mathbf{B}) = 2, \quad \text{c) } h(\mathbf{C}) = 2, \quad \text{d) } h(\mathbf{D}) = 1, \quad \text{e) } h(\mathbf{M}) = 3, \quad \text{f) } h(\mathbf{F}) = 3.$$

Matice (Násobení)



Příklad Vypočtete součin matic $\mathbf{A.B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\mathbf{A.B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-6 & -2 \\ -12+12 & 4 \\ 4-9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -2 \\ 0 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Vynásobte matice A.B a C.D jestliže platí:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

6. Daná je matice A. Zjistěte matici A^2 jestliže platí:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Vypočtete součet daných matic:

$$\text{a) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ i } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \text{ i } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{f) } \mathbf{A}^2, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\text{6. a) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 29 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 19 \\ -8 & 2 & 6 \\ -1 & 9 & 17 \end{pmatrix},$$

$$\text{b) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -19 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 17 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & -19 & 1 & 16 \\ -5 & 17 & -9 & -12 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{d) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -1 \\ -14 & -14 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\text{e) } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{f) } \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pro která x má matice $\mathbf{A}$ hodnost $h(\mathbf{A}) = 2$?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3x-1 & x \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gaussova eliminace

Příklad 4. Pomocí Gaussovy eliminace řešte zadané soustavy.

$$\begin{array}{l} a) \quad \begin{array}{rrrr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 7, \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b) \quad \begin{array}{rrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3, \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2, \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 11, \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c) \quad \begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -1, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 4, \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 7, \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d) \quad \begin{array}{rrrr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -1, \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5, \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} e) \quad \begin{array}{rrrr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 4, \\ 9x_1 & + & 7x_2 & + & x_3 & = & 3. \end{array} \end{array}$$

Příklad 5. Spočítejte hodnotu matice $\mathbb{A}$, jestliže:

$$\text{a) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad [\text{h}(\mathbb{A}) = 3] \quad \text{b) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 12 \end{pmatrix} \quad [\text{h}(\mathbb{A}) = 3]$$

$$\text{c) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{h}(\mathbb{A}) = 2] \quad \text{d) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad [\text{h}(\mathbb{A}) = 2]$$

$$\text{e) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad [\text{h}(\mathbb{A}) = 3] \quad \text{f) } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{h}(\mathbb{A}) = 4]$$