

MA2-E

(1. hodina)

Materiály:

Lze využít příklady uvedené v souboru „Řešené příklady“ v e-learningu předmětu PMA2E. Tento soubor je přiložen u každé přednášky. Dále lze čerpat příklady z učebnice Klůfa, J., Coufal, J. **Matematika 1. Praha: Ekopress. 2003.** a učebnice Kaňka, M., Henzler, J. **Matematika 2. Praha: Ekopress. 2003.** Obě učebnice se užívají na VŠE Praha, rozsah a obtížnost učiva je podobná jako u nás, *obdobně obtížné jsou příklady u zkoušky*. Obě učebnice jsou k dispozici v knihovně TUL (i v elektronické formě).

Příklady, které probereme, Vám také budu dávat na své stránky na webu katedry KMA. Ne vždy tam ale bude řešení příkladů (většinou pouze zadání).

Zápočet:

- Maximálně 3 neomluvené absence. Pokud by jich bylo více, měly by se doložit objektivní důvody.
- Odevzdání krátké seminární práce. Její zadání vám dám zhruba v půlce semestru a na její vypracování budete mít 2 týdny.
- **Dva zápočtové testy** (v půlce semestru a na konci). Je nutné **v součtu získat alespoň 50% bodů**. Pokud se vám to nepodaří, budete mít možnost opravy ve zkouškovém období.

Posloupnosti (opakování)

Funkce, jejímž definičním oborem je množina $\mathbf{N}$ všech přirozených čísel, se nazývá **posloupnost (nekonečná číselná posloupnost)**.

Příklady posloupností:

1. Čísla 2, 4, 6, 8, 10, 12, ... jsou prvními členy posloupnosti sudých kladných čísel. Tato posloupnost vznikne tak, že každému přirozenému číslu n přiřadíme jeho dvojnásobek $2n$. Libovolný člen $a_n = 2n$. Zapisujeme ji $\{2n\}$.
2. Čísla $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ jsou prvními členy posloupnosti převrácených čísel k přirozeným číslům. Dostaneme ji přiřazováním převrácené hodnoty $\frac{1}{n}$ ke každému přirozenému číslu, takže její libovolný člen $a_n = \frac{1}{n}$.
3. Čísla 4, 7, 10, 13, 16, ... jsou prvními členy posloupnosti, ve které je každému přirozenému číslu n přiřazeno číslo $1 + 3n$ a zapisujeme ji $\{1 + 3n\}$.

Aritmetická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy:

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d, \forall n \in \mathbf{N},$$

kde a, d jsou daná reálná čísla.

Číslo d nazýváme **diference** (difference = rozdíl), protože se rovná rozdílu $a_{n+1} - a_n$ kterýchkoliv dvou sousedních členů posloupnosti, tj. $d = a_{n+1} - a_n$.

Geometrická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n q, \forall n \in \mathbf{N}, \text{ kde } a, q \text{ jsou daná čísla.}$$

Číslo q se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti**. Budeme předpokládat, že je $a \neq 0 \wedge q \neq 0$. V takovém případě je každé $a_n \neq 0$ a z rekurentního vztahu plyne pro kvocient (latinský název pro podíl), že $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ je $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Řady

Vložíme-li mezi každé dva členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ znaménko $+$, dostaneme schéma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

které zapisujeme znakem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (čteme suma a_n od $n = 1$ do nekonečna).

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečná řada. Čísla $a_1, a_2, a_3, \dots$ nazýváme členy této řady.

Omezíme se jen na nekonečné geometrické řady a ukážeme si, jak v některých případech dospějeme k pojmu **součet nekonečné řady**.

Vytvoříme posloupnost:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

kterou nazveme **posloupností částečných součtů** dané nekonečné řady. Pro tuto posloupnost pak mohou nastat pouze tyto dva případy: - má limitu s ;
- nemá limitu.

V prvním případě říkáme, že daná nekonečná řada je **konvergentní**, a číslo s nazýváme jejím **součtem**. V druhém případě říkáme, že nekonečná řada je **divergentní**, tj. nemá součet.

Pokud je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že **nekonečná řada (2) je konvergentní**, a příslušnou limitu nazýváme **součet nekonečné řady (2)**. Jestliže posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní, říkáme, že **nekonečná řada (2) je divergentní**.

Je-li nekonečná řada (2) konvergentní a je-li její součet roven s , zapisujeme tuto skutečnost takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ označujeme tedy nejen nekonečnou řadu, ale též její součet (pokud ovšem existuje).

Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická a její kvocient je q , nazýváme nekonečnou řadu (2) **nekonečná geometrická řada** s kvocientem q .

Lze dokázat, že nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^n$ je konvergentní jenom v tom případě,

když je $|q| < 1$; její součet potom je $s = \frac{a_1}{1-q}$.

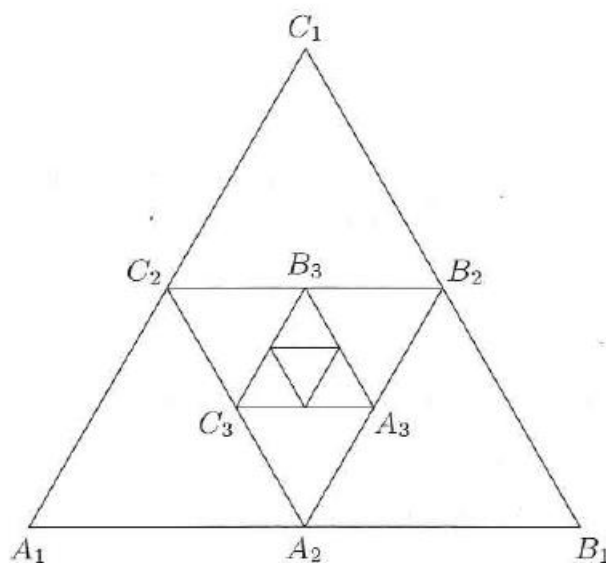
Pro $|q| \geq 1$ je řada divergentní.

Příklad Určete součet nekonečné geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}}$.

Příklad 4

Do rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ o délce strany 2 je vepsán druhý trojúhelník $A_2B_2C_2$, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$ (obr. 3.11). Do tohoto trojúhelníku je stejným způsobem vepsán trojúhelník $A_3B_3C_3$ atd. Vypočítejte

- a) součet obvodů, b) součet obsahů
všech takto vzniklých trojúhelníků.



Obr. 3.11

3.25 Zjistěte, které z dále uvedených řad jsou konvergentní; v kladném případě vypočítejte jejich součet:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^{n-1}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n$

3.26 Je dána aritmetická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d . Zjistěte, pro která a_1 a d je nekonečná aritmetická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Příklady jsou převzaty ze stránek: (řešení je zde uvedeno také)

https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js20/nekonecne_rady/web/pages/1-ciselne-rady.html

Co byste měli znát:

- 1) Jak vypadá geometrická řada
- 2) Nutná (ale nikoli postačující) podmínka konvergence řad
- 3) Podílové kritérium konvergence řad
- 4) Integrální kritérium
- 5) Odmocninové kritérium konvergence řad
- 6) Leibnizovo kritérium (alternující řady)

Věta 3.

Pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

(1.1)

Podmínka 1.1. je podmínkou nutnou pro konvergenci řady, nikoli postačující. Existují tedy řady, které nekonvergují, ale podmínku 1.1 splňují.

Součty geometrických řad:

Věta 1.

Nechť je $a \neq 0$. Geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ konverguje, právě když $|q| < 1$, přičemž platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Uvažujte nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{(-3)^n}.$$

Určete její součet.

Určete součet nekonečné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9 \cdot 3^n - 2^{n+1}}{6^n}.$$

K zapamatování (odvození pomocí integrálního kritéria):

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Věta 5. (Srovnávací kritérium)

Nechť $a_n, b_n \geq 0$ a nechť $a_n \leq b_n$ pro všechna dostatečně velká n . Platí:

- i. Je-li $\sum_{n=N}^{\infty} b_n < +\infty$, pak $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < +\infty$.
- ii. Naopak, je-li $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = +\infty$, pak $\sum_{n=N}^{\infty} b_n = +\infty$.

Rozhodněte o konvergenci/divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1234 + n)}{n}.$$

Použitím srovnávacího kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}.$$

Použitím srovnávacího kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^2}.$$

Věta 7. (Podílové (d'Alambertovo) kritérium)

Nechť $a_n > 0$ pro všechna velká n . Platí:

i. Je-li

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1$$

pro všechna dostatečně velká n a jistou konstantu k , pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje.

ii. Je-li

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

pro všechna dostatečně velká n , pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$.

Rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Pomocí podílového kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Pomocí podílového kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Pomocí podílového kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Věta 8. (Odmocninové (Cauchyovo) kritérium)

Nechť $a_n \geq 0$ pro všechna velká n .

i. Je-li

$$\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$$

pro všechna dostatečně velká n a jistou konstantu k , pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje.

ii. Je-li

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

pro všechna dostatečně velká n , pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ diverguje k $+\infty$.

Pomocí (limitní verze) odmocninového kritéria rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n+3} \right)^n.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} \right)^n.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^n n}{2^n}.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \sin n)^n}{2^n}.$$

Věta 9. (Integrální kritérium)

Nechť je dána řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ a nechť je funkce f definovaná na intervalu $[N, \infty)$ pro jisté $N \in \mathbb{Z}$, přičemž funkce f je na tomto intervalu nezáporná, nerostoucí a platí

$$f(n) = a_n \quad \text{pro všechna } n \geq N, n \in \mathbb{Z}.$$

Potom platí, že

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konverguje, právě když } \int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konverguje,}$$

tj.

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = +\infty \text{ právě tehdy, když } \int_N^{\infty} f(x) dx = +\infty.$$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

Použitím integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}.$$

Věta 15. (Leibnizovo kritérium)

Nechť $\{a_n\}_{n=N}^{\infty} \subset (0, \infty)$ je nerostoucí posloupnost. Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, pak alternující řada $\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.

Rozhodněte o konvergenci (divergenci) tzv. Leibnizovy řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Stanovte, zda řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{8n-3}$$

konverguje, či nekonverguje.