

10. hodina (MA2-E)

Hledání extrémů funkce více proměnných

Definice 6.1.2.

Řekneme, že bod $A \in \mathbb{R}^n$ je **stacionárním bodem** funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Věta 6.1.1.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě A lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace funkce f . Pak bod A je stacionárním bodem funkce f .

Poznámka: stacionární bod je pouze nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému, nikoli postačující. Tzn. funkce nutně nemusí mít ve stacionárním bodě extrém.

Označme

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}$$

hlavní determinanty matice parciálních derivací druhého řádu. Pak pro stacionární bod A funkce f platí:

1. Je-li $D_1 > 0 \wedge D_2 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální minimum**,
2. Je-li $D_1 < 0 \wedge D_2 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální maximum**,
3. Je-li $D_2 < 0$, pak pro funkci f v bodě A **extrém neexistuje**.

Věta 6.1.3.

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$ je na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ dvakrát spojitě diferencovatelná. Nechť bod A je její stacionární bod. Jestliže

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \right)^2 > 0,$$

pak má funkce f v bodě A ostrý lokální extrém. Je-li navíc $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$, jedná se o **ostré lokální minimum**, je-li $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$, jedná se o **ostré lokální maximum**.

Poznámka

V případě, že $D_2 = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout. Tento problém lze v některých případech řešit tak, že vyšetříme lokální chování funkce f na okolí bodu A .

Příklad 6.1.1. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2.$$

Řešení: Funkce je definovaná na celém \mathbb{R}^2 , $D_f = \mathbb{R}^2$. Postup řešení lze rozdělit do následujících kroků:

1. Určíme parciální derivace funkce f prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 6y.$$

2. Parciální derivace položíme rovny nule, tj. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dostaneme tak soustavu rovnic pro stacionární body funkce f .

$$3x^2 - 3y = 0,$$

$$-3x + 6y = 0.$$

3. Soustavu rovnic pro stacionární body vyřešíme. Ze druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do rovnice první.

$$x = 2y \Rightarrow 3(2y)^2 - 3y = 0 \Rightarrow 12y^2 - 3y = 0 \Rightarrow y(4y - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A_1 = [0, 0]$$

$$y = \frac{1}{4} \Rightarrow -3x + \frac{6}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right].$$

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu funkce f ,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Do matice Q postupně dosadíme jednotlivé stacionární body (tzn. x -ovou souřadnici stacionárního bodu za x , y -ovou souřadnici stacionárního bodu za y).

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q(A_2) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Vypočítáme determinanty D_1, D_2 pro matice $Q(A_1), Q(A_2)$. Hodnoty determinantů rozhodnou o charakteru extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0, 0]$	0	$-9 < 0$	extrém neexistuje
$A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$	$3 > 0$	$9 > 0$	ostré lokální minimum $z = -\frac{1}{16}$

Příklad 6.1.3. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^3.$$

Řešení: Definičním oborem funkce f je $D_f = \mathbb{R}^2$.

1. Určíme parciální derivace funkce f .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2.$$

2. Parciální derivace položíme rovny 0, dostáváme soustavu rovnic pro stacionární body,

$$3x^2 = 0,$$

$$3y^2 = 0.$$

3. Řešením soustavy je jediný stacionární bod $A = [0, 0]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix}.$$

5. Do matice Q dosadíme stacionární bod,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Determinant $D_1 = 0$, $D_2 = 0$. Nemůžeme o existenci extrému rozhodnout. Ovšem jaká bude funkční hodnota v bodě A ? Dosadíme souřadnice bodu A do funkčního předpisu funkce f , tedy $f(A) = 0$. Jak se funkce chová na okolí bodu $A = [0, 0]$. Když dosadíme za x a za y záporná čísla, hodnota z bude záporná, tj. $z < f(A)$. Pokud za x a y do funkčního předpisu dosadíme kladná čísla, hodnota z bude kladná, tj. $z > f(A)$. Na libovolném okolí bodu $[0, 0]$ existují body, jejichž funkční hodnota je větší než $f(A)$, ale zároveň existují body, jejichž funkční hodnota je menší než $f(A)$. V bodě $A = [0, 0]$ extrém neexistuje.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Nalezněte lokální extrémů funkce $f(x, y) = x^2 + 6x + 3y^2 - 12y + 11$.
2. Nalezněte lokální extrémů funkce $f(x, y) = 3xy - x + 2y$.
3. Nalezněte lokální extrémů funkce $f(x, y) = x^2 - xy + 3x + y + 3$.
4. Nalezněte lokální extrémů funkce $f(x, y) = x^3 - 12x - 2y^2 - 4y$.
5. Nalezněte lokální extrémů funkce $f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{3}y^3 - 9y$.
6. Nalezněte lokální extrémů funkce $f(x, y) = x^5 - 5x + y^3 - 3y$.
7. Nalezněte lokální extrémů funkce $f(x, y) = x^2 + 3xy - 2x - 3y + 5y^2 + 3$.
8. Nalezněte lokální extrémů funkce $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4x + \frac{9}{2}y^2 - 15y$.
9. Nalezněte lokální extrémů funkce $f(x, y) = (x^2 + 4x)y + y^2$.
10. Nalezněte lokální extrémů funkce $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 20y$.

Poznámka: (pro zápočtový test nepotřebujete)

Výše uvedený postup identifikace extrémů lze zdůvodnit pomocí tzv. konstrukce diferenciálu druhého řádu. Lze ukázat, že v okolí bodu A (například bodu o souřadnicích $(1, 2)$), lze funkci $f(x, y)$ (funkce může mít více než dvě proměnné) přibližně nahradit polynomem druhého řádu. Označme souřadnice bodu $A = (a, b)$. Pak:

$$\begin{aligned} f(a + dx, b + dy) &\approx \\ &\approx f(a, b) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} (dy)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y \partial x} dy dx \end{aligned}$$

Kde dx a dy jsou proměnné (obvykle libovolná velmi malá čísla), vše ostatní jsou konstanty. Pokud je v bodě $A = (a, b)$ extrém, musí být

$$\frac{\partial f(a, b)}{\partial x} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} = 0$$

A výše uvedený polynom má tvar:

$$f(a + dx, b + dy) \approx f(a, b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} (dy)^2 + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y \partial x} dy dx$$

Nyní lze ukázat, že pokud se v bodě A nachází **maximum** pak pro *libovolné* proměnné dx a dy (které ale současně nejsou rovny nule) je výraz

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} (dy)^2 + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y \partial x} (dy)(dx) < 0$$

Říkáme, že v takovém případě je výše uvedený polynom **negativně definitní**.

Pokud se v bodě A nachází **minimum** pak pro *libovolné* proměnné dx a dy platí:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2} (dy)^2 + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y \partial x} dy dx > 0$$

Říkáme, že v takovém případě je výše uvedený polynom **pozitivně definitní**.

Pokud výše uvedený polynom znaménka střídá pro různých hodnoty proměnných dx a dy , je **indefinitní a extrém v bodě A není**.

- Je-li Q pozitivně definitní, má funkce f v bodě A ostré lokální minimum.
- Je-li Q negativně definitní, má funkce f v bodě A ostré lokální maximum.
- Je-li Q indefinitní, nemá funkce f v bodě A lokální extrém.

Úloha:

Výše uvedeným postupem – konstrukcí diferenciálu druhého řádu dané funkce $f(x, y)$ – určete a identifikujte extrém následující funkce:

$$f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 8y$$

Řešení:

Podezřelý bod: $[0, 1]$

Diferenciál druhého řádu:

$$2(dx)^2 + 0(dx)(dy) + 4(dy)^2$$

Tento diferenciál je však pro libovolné proměnné dx a dy kladný. Bod $[0, 1]$ je tedy minimum.

Výše uvedené téma v řeči determinantů:

(v *semidefinitním* případě nelze o extrému rozhodnout a musí se zvolit jiný přístup)

3. Sylvesterovo kritérium

Nechť A je matice kvadratické formy κ a označme $D_1 = \det [d_{11}]$, $D_2 = \det \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$, \dots , $D_n =$

$$\det \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pak platí, že kvadratická forma κ je

(a) pozitivně definitní právě tehdy, když

$$D_1 > 0, \dots, D_n > 0,$$

(b) negativně definitní právě tehdy, když

$$(-1)^1 D_1 > 0, (-1)^2 D_2 > 0, (-1)^3 D_3 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0,$$

tedy

$$D_1 < 0, D_2 >, D_3 < 0, \dots,$$

(c) pozitivně semidefinitní právě tehdy, když

$$D_1 \geq 0, \dots, D_n \geq 0,$$

(d) negativně semidefinitní právě tehdy, když

$$D_1 \leq 0, D_2 \geq 0, D_3 \leq 0, \dots,$$

(e) indefinitní právě tehdy, když nenastane žádný případ z výše uvedených.

Příklad

Vyšetřete kvadratickou formu $\kappa = 2dx^2 + 3dy^2 + 4dz^2 - 4dx dz - 12dy dz$.

Řešení:

$D_1 = 2, D_2 = 6, D_3 = -60$, kvadratická forma κ je indefinitní.

Další úlohy:

Příklad 6. Vyšetřete lokální extrémy funkcí, je-li:

a) $f(x, y) = 1 + 6y - y^2 - xy - x^2,$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2,$

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y,$

d) $f(x, y) = 2x^3 y - x^2 y^2 + 32x + 5$

e) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5,$

f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy + 15$

Příklad 7. Vyšetřete lokální extrémy funkcí, je-li:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + yz - 2x + y - z,$

b) $f(x, y, z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1,$

c) $f(x, y, z) = x^3 + 3x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 14x + 14y + 4z + 17,$

d) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz + yz),$

e) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z,$

Příklad 5. Vypočítejte parciální derivace funkce f podle všech jejích proměnných v obecném bodě a vyčíslete je v daném bodě A , je-li:

a) $f(x, y) = \frac{\pi}{3}x^2y, A = [4, 6],$	$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\pi}{3}xy, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pi}{3}x^2 \right]$
b) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, A = [1, 1],$	$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} \right]$
c) $f(x, y) = x^2y + \frac{y^3}{x^4}, A = [1, 1],$	$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{4y^3}{x^5}, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{3y^2}{x^4} \right]$
d) $f(x, y) = x \sin^2 y, A = [1, \pi],$	$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \sin^2 y, \frac{\partial f}{\partial y} = 2x \sin y \cos y \right]$
e) $f(x, y) = e^x \sin(2y), A = [0, 0],$	$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin(2y), \frac{\partial f}{\partial y} = 2e^x \cos(2y) \right]$
f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y}, A = [1, 0],$	$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}} \right]$
g) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}, A = [1, -1],$	$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \right]$
h) $f(x, y) = x^y, A = [2, -1],$	$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x \right]$

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. Stacionární bod: $A = [-3, 2]$ - ostré lokální minimum $f(A) = -10$.

2. Stacionární bod: $A = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ - extrém neexistuje.

3. Stacionární bod: $A = [1, 5]$ - extrém neexistuje.

4. Stacionární body: $A_1 = [2, -1]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [-2, -1]$ - ostré lokální maximum $f(A_2) = 18$.

5. Stacionární body: $A_1 = [5, 3]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [5, -3]$ - ostré lokální maximum $f(A_2) = \frac{61}{2}$.

6. Stacionární body: $A_1 = [-1, 1]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [1, 1]$ - ostré lokální minimum $f(A_2) = -6$, $A_3 = [1, -1]$ - extrém neexistuje, $A_4 = [-1, -1]$ - ostré lokální maximum $f(A_4) = 6$.

7. Stacionárním bod: $A = [1, 0]$ - ostré lokální minimum $f(A) = 2$.

8. Stacionárním bod: $A = [12, 7]$ - ostré lokální minimum $f(A) = -\frac{57}{2}$.

9. Stacionární body: $A_1 = [0, 0]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [-4, 0]$ - extrém neexistuje, $A_3 = [-2, 2]$ - ostré lokální minimum $f(A_3) = -4$.

10. Stacionární body: $A_1 = [2, 4]$ - ostré lokální minimum $f(A_1) = -58$,
 $A_2 = [2, -5]$ - extrém neexistuje, $A_3 = [-3, 4]$ - extrém neexistuje, $A_4 = [-3, -5]$
- ostré lokální maximum $f(A_4) = \frac{253}{3}$.

[lokální maximum v $[-2, 4]$

[lokální minimum v $[1, 1]$

[lokální minimum v $[1, 4]$

[nemá extrém, sedlo v $[-2, -2]$

[lokální minimum v $\left[1, \frac{1}{2}\right]$

[lokální minimum v $[6, 6]$, sedlo v $[0, 0]$

[lok. min. v $[1, -1, 1]$

[lok. min. v $[0, 0, 0]$

[lok. min. v $[0, -7, -2]$

[sedlo v $[0, 0, 0]$, lok. min. v $[2, 2, 2]$

[lok. min. v $[24, -144, -1]$