

## 11. hodina (MA2-E)

### Př.1.

Vyšetřete extrémy funkce

$$f(x, y) = e^{(2x+3y)} \cdot (8x^2 - 6xy + 3y^2)$$

### Extrém funkce $f$ na křivce $g$ – vázané extrémy

Kromě funkce  $f(x, y)$  je ještě zadána **vazba** (omezující podmínka pro  $x$  a  $y$ ) ve tvaru  $g(x, y) = 0$ . Hledáme extrémy funkce  $f(x, y)$ , které jsou vázány (leží na ní) křivkou  $g(x, y) = 0$ .

Budeme používat dvě metody:

- a) **Dosazovací metoda:** z vazby  $g(x, y) = 0$  vyjádříme  $x$  nebo  $y$  a dosadíme do  $f(x, y)$ , čímž získáme funkci jedné proměnné, a extrémy tedy hledáme podobně jako u funkce jedné proměnné. Tuto metodu použijeme v případě, že z rovnice vazby lze osamostatnit  $x$  nebo  $y$ .

b)

**Věta 4.6 (Metoda využívající jakobiánu, nutná podmínka vázaného extrému).** *Nechť funkce  $f$  a  $g$  mají v okolí bodu  $[x_0, y_0]$  spojité obě parciální derivace a nechť funkce  $f$  má v bodě  $[x_0, y_0]$  vázaný extrém vzhledem k vazbě dané rovnicí  $g(x, y) = 0$ , potom platí, že determinant*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

U následujících úloh stačí, pokud najdete „podezřelé body“ (body ve kterých se extrém může, ale nemusí nacházet). Důvodem je, že použití jakobiánu je nutnou, nikoli postačující podmínka vázaného extrému).

**Příklad 6.2.1.** Nalezněte vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = x + y,$$

vzhledem k podmínce  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$ .

Řešení:

Stac. bod $A_i$
$A_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
$A_2 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$

**Příklad 6.2.2.** Určete vázané extrémů funkce

$$f(x, y) = 27(x + y - 1)$$

vzhledem k podmínce  $9(x^2 + y^2) = 2x^2y^2$ .

Řešení:

Stac. bod $A_i$
$A_1 = [3, 3]$
$A_2 = [-3, -3]$

Následující úlohu řešte dosazovací metodou a určete, zda se v daném „podezřelém bodě“ skutečně extrém nachází a pokud ano, zda je to minimum nebo maximum:

**Příklad 6.2.3.** Určete vázané extrémů funkce

$$f(x, y) = xy - x + y - 1,$$

vzhledem k podmínce  $x + y = 1$ .

---

**Řešení:** Definiční obor funkce  $D_f = \mathbb{R}^2$ .

1. Z podmínky  $x + y = 1$  můžeme vypočítat jak  $x$ , tak i  $y$ . Z podmínky vyjádříme např.  $y$ ,

$$y = 1 - x.$$

2. Dosadíme  $y = 1 - x$  do funkce  $z = f(x, y) = xy - x + y - 1$  a dostaneme funkci jedné proměnné  $x$ ,

$$z = x(1 - x) - x + 1 - x - 1 = -x^2 - x.$$

3. Hledáme extrémy funkce jedné proměnné.

$$z' = -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2},$$

$$z'' = -2 < 0.$$

Druhá derivace je záporná pro všechny body definičního oboru funkce jedné proměnné  $z$ , a tedy i v bodě  $x = -\frac{1}{2}$  je druhá derivace záporná,  $z''(-\frac{1}{2}) = -2 < 0$ . Funkce  $z$  má v bodě  $x = -\frac{1}{2}$  ostré lokální maximum. Dopočítáme hodnotu  $y$ ,

$$y = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}.$$

Funkce  $f(x, y) = xy - x + y - 1$  má v bodě  $A = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  vázané lokální maximum  $z = \frac{1}{4}$ .

Pozn.: pokud budete následující úlohy řešit metodou jakobiánu, stačí najít podezřelé body. Pokud budete úlohu řešit dosazovací metodou, určete, zda se v daném „podezřelém bodě“ skutečně extrém nachází a pokud ano, zda se jedná o minimum nebo maximum

**Užitečná strategie:** pokud je křivka/množina  $g$  (na níž hledáme maximum funkce  $f$ ) omezená, k určení maxima (minima) stačí najít všechny podezřelé body a funkční hodnoty v těchto bodech porovnat – nemusíme určovat co je a co není lokální maximum. Zdůvodnění je, že omezená a „uzavřená“ množina vždy musí maximum a minimum někde mít (na rozdíl od neomezené množiny) a to se musí nacházet nutně mezi podezřelými body.

1. Určete vázané extrémů funkce  $f(x, y) = 4x + 2y + 1$  vzhledem k podmínce  $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$ .

2. Určete vázané extrémů funkce  $f(x, y) = 12x + y - 3$  vzhledem k podmínce  $y = -x^3 + 3$ .

3. Určete vázané extrémů funkce  $f(x, y) = 3y + 2x^4 + 9x^2 + 6$  vzhledem k podmínce  $y = -x^4 + 3x^2 - 2$ .

4. Určete vázané extrémů funkce  $f(x, y) = e^{x^2+y}$  vzhledem k podmínce  $y = -x^3$ .

5. Určete vázané extrémů funkce  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  vzhledem k podmínce  $y = x + 3$ .

6. Určete vázané extrémů funkce  $f(x, y) = \sqrt{4x + y^2 + 5}$  vzhledem k podmínce  $y = 2x - 3$ .

7. Určete vázané extrémů funkce  $f(x, y) = x^3 + y^3$  vzhledem k podmínce  $2x + 2y = 1$ .

8. Určete vázané extrémů funkce  $f(x, y) = -8x + 6y - 5$  vzhledem k podmínce  $x^2 + y^2 = 100$ .

9. Určete vázané extrémů funkce  $f(x, y) = 4x + 3y - 4$  vzhledem k podmínce  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$ .

10. Určete vázané extrémů funkce  $f(x, y) = -3x - 9$  vzhledem k podmínce  $3y - y^3 = x^2$ .

### Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1.  $[-\frac{3}{2}, 1]$  - vázané lokální minimum.
2.  $[-2, 11]$  - vázané lokální minimum,  $[2, -5]$  - vázané lokální maximum.
3.  $[0, -2]$  - vázané lokální minimum,  $[3, -56]$  - vázané lokální maximum,  $[-3, -56]$  - vázané lokální maximum.
4.  $[0, 0]$  - vázané lokální minimum,  $[\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}]$  - vázané lokální maximum.
5.  $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$  - vázané lokální minimum.
6.  $[1, -1]$  - vázané lokální minimum.
7.  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$  - vázané lokální minimum.
8.  $[8, -6]$  - vázané lokální minimum,  $[-8, 6]$  - vázané lokální maximum.
9.  $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$  - vázané lokální minimum,  $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$  - vázané lokální maximum.
10.  $[\sqrt{2}, 1]$  - vázané lokální minimum,  $[-\sqrt{2}, 1]$  - vázané lokální maximum.

13. Stanovte vázané extrémy dané funkce  $f$  vzhledem k daným vazbám:

- |     |                           |  |
|-----|---------------------------|--|
| (a) | $f(x, y) = x - y$         | na kružnici $x^2 + y^2 = 2$ ,                                |
| (b) | $f(x, y) = x^2 + 3y^2$    | na přímce $x - 2y + 7 = 0$ ,                                 |
| (c) | $f(x, y) = e^{xy-4x}$     | na úsečce $y - 2x = 0, x \in (0, 5)$ ,                       |
| (d) | $f(x, y) = \sqrt{xy}$     | na čtvrtkružnici $x^2 + y^2 = 8, x \geq 0, y \geq 0$ ,       |
| (e) | $f(x, y) = e^{xy}$        | na kružnici $x^2 + y^2 = 8$ ,                                |
| (f) | $f(x, y) = (x + 2y^2)e^x$ | na přímce $[x, y] = [-1, 2] + t(-1, 1), t \in \mathcal{R}$ , |
| (g) | $f(x, y, z) = x - 2y + z$ | na povrchu elipsoidu $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 1$ .              |

14. Stanovte globální extrémy daných funkcí definovaných na daných množinách:

- (a)  $f(x, y) = x^2 - y^2$  na kruhu  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,
- (b)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$  na trojúhelníku vymezeném přímkami  $x - y = 1, x = -1, x + y = 1$ ,
- (c)  $f(x, y) = xy$  na množině  $x^2 + y^2 \leq 8, xy \leq 0$ .

## Globální extrém funkce $f$ na uzavřené množině $M$

### Definice 6.3.1.

Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^n \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$  má na uzavřeném definičním oboru  $D_f$  **globální maximum** (absolutní maximum) v bodě  $A \in D_f$ , jestliže  $\forall X \in D_f$  platí  $f(X) \leq f(A)$ .

Řekneme, že funkce  $f : \mathbb{R}^n \supseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$  má na uzavřeném definičním oboru  $D_f$  **globální minimum** (absolutní minimum) v bodě  $A \in D_f$ , jestliže  $\forall X \in D_f$  platí  $f(X) \geq f(A)$ .

Je-li  $f(X) < f(A)$  resp.  $f(X) > f(A)$ , hovoříme o **ostrém globálním maximum** resp. **ostrém globálním minimum**.

### **Poznámka**

Množina  $D_f$  se nazývá **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.

**Hraničním bodem** množiny  $D_f$  rozumíme takový bod, jehož každé okolí obsahuje body  $X$  ležící v  $D_f$ , tj.  $X \in D_f$ , a současně obsahuje body  $Y$  neležící v  $D_f$ , tj.  $Y \notin D_f$ . Také množina  $\mathbb{R}^n$  je množina uzavřená. Ovšem hranice této množiny je prázdná množina,  $\emptyset$ .

### **Poznámka**

Na rozdíl od lokálních extrémů, které se hledají na okolích bodů, hledáme globální extrémy na celé množině  $D_f$ .

Uvažujme spojitou a alespoň dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci (tj. existují spojitě parciální derivace alespoň až do druhého řádu)  $z = f(x, y)$ , defino-

vanou na uzavřené množině  $D_f$ . Necht' hranice této množiny je křivka o rovnici  $g(x, y) = 0$ . Globální extrémů funkce  $f$  na množině  $D_f$  budeme určovat takto:

1. Určíme lokální extrémů funkce  $f$  na množině  $D_f$ , ze které vyloučíme hranici.
2. Určíme lokální extrémů této funkce vázané podmínkou  $g(x, y) = 0$ .
3. Porovnáme funkční hodnoty všech extrémů. Extrém s největší funkční hodnotou bude **globálním maximem**, extrém s nejmenší funkční hodnotou bude **globálním minimem**.

*Při vyšetřování globálních extrémů na dané množině stačí určit všechny podezřelé body: uvnitř množiny body, které mají parciální derivaci podle libovolné proměnné rovnou nule a na hranici množiny body, které splňují nutnou podmínku pro vázaný extrém na hraniční křivce (jakobiho determinant nebo identifikace bodů s pomocí dosazovací metody). Poté funkční hodnoty ve všech těchto bodech porovnáme a určíme, kde je globální maximum a globální minimum funkce na množině.*

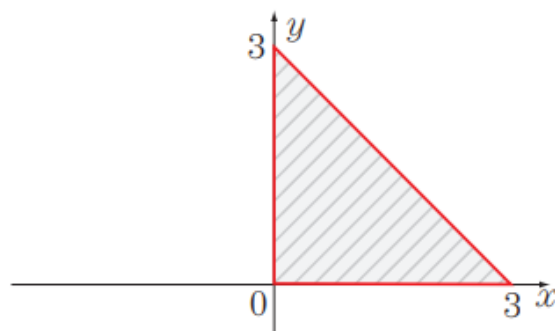
#### **Poznámka**

*Je-li hranice tvořena konečným počtem křivek, vyšetřujeme vázané extrémů na jednotlivých křivkách. V tomto případě ovšem musíme uvažovat i vrcholy hraničních křivek při konečném porovnávání funkčních hodnot.*

**Příklad 6.3.1.** Nalezněte globální extrémů funkce  $z = f(x, y)$ ,

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$$

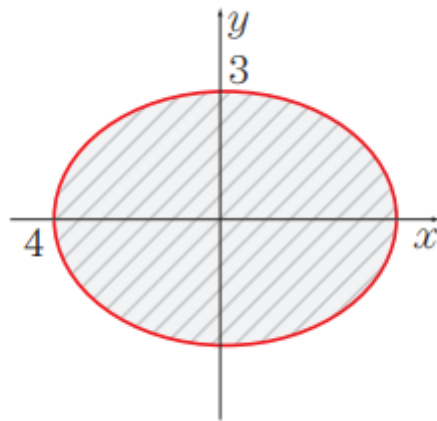
je-li  $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -x + 3\}$ .



Řešení:

Funkce  $f$  má v bodě  $A = [0, 0]$  globální maximum  $z = -1$  a v bodě  $C = [0, 3]$  globální minimum  $z = -19$ .

**Příklad 6.3.2.** Na elipse  $9x^2 + 16y^2 \leq 144$  nalezněte globální extrémů funkce  $z = f(x, y)$ ,  
 $f(x, y) = 9x^2 - 36x + 16y^2 - 64y$ .



Řešení.

Funkce  $f$  má v bodě  $A_1 = [2, 2]$  globální minimum  $z = -100$  a v bodě  $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$  globální maximum  $z = 384$ .

### Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete globální extrémy funkce  $f(x, y) = x^2 - y$  na čtverci s vrcholy  $[1, 1]$ ,  $[3, 1]$ ,  $[1, 3]$ ,  $[3, 3]$ .
2. Určete globální extrémy funkce  $f(x, y) = x^2 + y^2$  na trojúhelníku s vrcholy  $[0, 0]$ ,  $[2, 0]$ ,  $[0, 1]$ .
3. Určete globální extrémy funkce  $f(x, y) = 4y$  na kruhu  $x^2 + y^2 \leq 1$ .
4. Určete globální extrémy funkce  $f(x, y) = 3x + 4y + 1$  na kruhu  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ .
5. Určete globální extrémy funkce  $f(x, y) = 5x - 3y + 1$  na trojúhelníku s vrcholy  $[1, 4]$ ,  $[-2, 1]$ ,  $[0, -1]$ .
6. Určete globální extrémy funkce  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$  na trojúhelníku s vrcholy  $[1, 4]$ ,  $[-2, 1]$ ,  $[0, -1]$ .
7. Určete globální extrémy funkce  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$  na čtverci s vrcholy  $[0, 0]$ ,  $[-1, 0]$ ,  $[-1, -1]$ ,  $[0, -1]$ .
8. Určete globální extrémy funkce  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$  na kruhu  $x^2 + y^2 \leq 16$ .
9. Určete globální extrémy funkce  $f(x, y) = 2x + 4y + 1$  na elipse  $x^2 + 4y^2 \leq 1$ .
10. Určete globální extrémy funkce  $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$  na čtverci s vrcholy  $[2, 0]$ ,  $[0, 2]$ ,  $[-2, 0]$ ,  $[0, -2]$ .

### Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1.  $[1, 3]$  - globální minimum,  $[3, 1]$  - globální maximum. Návod: pro vyjádření hraničních křivek stačí najít rovnice přímk, které jsou určeny vrcholy čtverce.

2.  $[0, 0]$  - globální minimum,  $[2, 0]$  - globální maximum.

3.  $[0, -1]$  - globální minimum,  $[0, 1]$  - globální maximum.

4.  $[\frac{12}{5}, \frac{1}{5}]$  - globální minimum,  $[\frac{18}{5}, \frac{9}{5}]$  - globální maximum.

5.  $[-2, 1]$  - globální minimum,  $[0, -1]$  - globální maximum.

6.  $[1, 4]$  - globální minimum,  $[0, 1]$  - globální maximum.

7.  $[-1, -1]$  - globální minimum,  $[0, 0]$  - globální maximum.

8.  $[0, -4]$  - globální minimum,  $[0, 1]$  - globální maximum.

9.  $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}]$  - globální minimum,  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}]$  - globální maximum.

10.  $[0, 0]$  - globální minimum,  $[0, -2]$  - globální maximum,  $[0, 2]$  - globální maximum.