12. hodina ***(MA2-E)***

Diferenciální rovnice

Definice 7.1.1.
Rovnice tvaru $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots, y', y, x) = 0$ se nazývá **diferenciální rovnice** **n-tého řádu** pro funkci $y = y(x)$. Speciálně je

$$F(y', y, x) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad y' = f(x, y)$$

diferenciální rovnice prvního řádu.
Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace hledané funkce $y(x)$.
Řešením diferenciální rovnice je každá funkce, která rovnici vyhovuje (na zadané množině).
Graf konkrétního řešení rovnice se nazývá **integrální křivka**.

- **obecné řešení** rovnice 1. řádu představuje množinu funkcí tvaru

$$\phi(x, y, C) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad y = \varphi(x, C)\,;$$

- **partikulární řešení** je konkrétní funkce získaná z obecného řešení volbou nebo výpočtem konstanty C;
- **výjimečné řešení** nelze získat z obecného pro žádnou hodnotu C; existuje pouze u některých typů rovnic a v tomto textu se jím nebudeme až na výjimky zabývat.

(Obecné řešení má obecný parametr: konstantu C, která může nabývat různých hodnot. Partikulární řešení má konkrétní hodnotu konstanty C, která se určí na základě dalších podmínek)

Příklad 7.2.1. Je dána rovnice $y' = -2x$. Určete
a) její obecné řešení,
b) partikulární řešení určené podmínkou $y(1) = 2$.

Řešení:

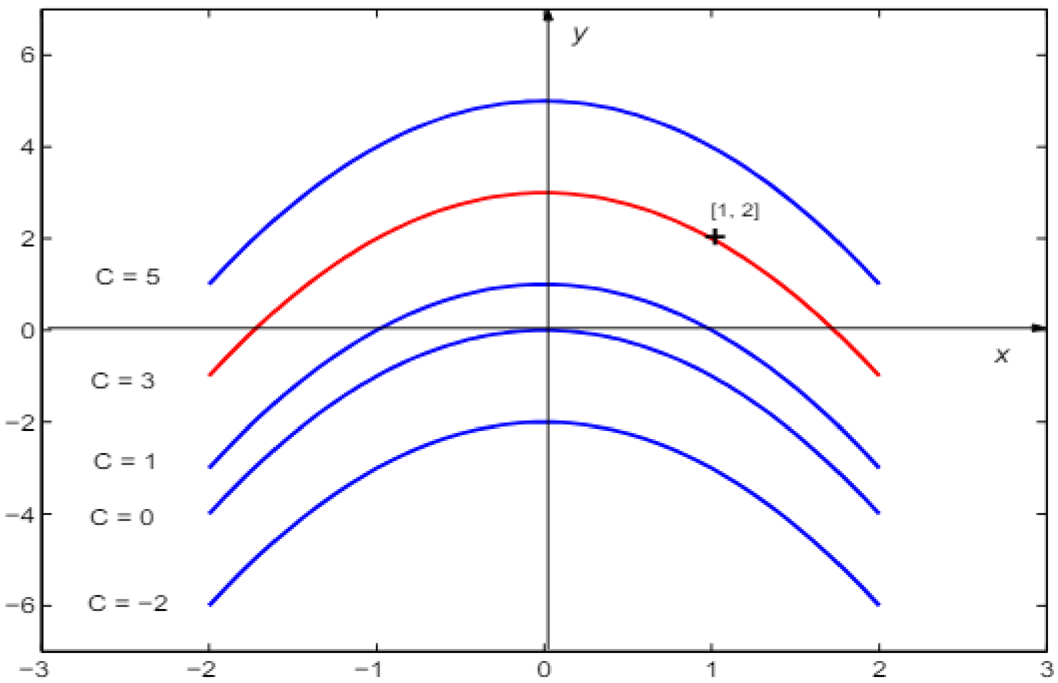
a) $y(x) = \int(-2x)\,dx = -x^2 + C$, proto soustava parabol o rovnicích $y = C - x^2$ (obr. 7.2.1) představuje obecné řešení úlohy. O jeho správnosti se lze snadno přesvědčit zkouškou.

b) Zadaná podmínka znamená, že hledáme integrální křivku, která prochází bodem $[1, 2]$. Dosazením těchto souřadnic do obecného řešení dostáváme

$$2 = C - 1^2\,, \qquad \text{odkud} \qquad C = 3\,.$$

Výsledným partikulárním řešením je tedy parabola (na obr. 7.2.1 červeně)

$$y_p = 3 - x^2\,.$$



Obr. 7.2.1. Integrální křivka partikulárního řešení příkladu 7.2.1. a několik dalších parabol z obecného řešení.

3. Najděte obecné řešení rovnic:

a) $(1-2y)y' = 2x$ b) $y' \cos y = \sin x$.

4. Řešte počáteční úlohy:

a) $\frac{y'}{y^2} = 2x, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$, b) $y'.\mathrm{e}^y = 1, \quad y(1) = 0.$

Řešení:

3. a) $y - y^2 = x^2 + C$, b) $y = \arcsin(C - \cos x).$

4. a) $y = \frac{1}{x^2-2}$, b) $y = \ln x.$

Způsob řešení diferenciálních rovnic

1) Separace proměnných

U tohoto typu, který zapisujeme obvykle ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$, postačuje k separaci jednoduchá úprava rovnice (využijeme identity $y' = dy/dx$):

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)\,dx\,,$$

po níž může hned následovat integrace.

Příklad 8.1.1. Najděte řešení rovnice $y' = -y.\mathrm{cotg}x$.

Řešení: Separace vede k rovnici

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx\ ,$$

kterou po integraci zapíšeme takto:

$$\ln|y| = -\ \ln|\sin x| + \ln C\ .$$

Po odlogaritmování dostáváme obecné řešení

$$y(x) = \frac{C}{\sin x}\ .$$

Příklad 8.1.2. Najděte řešení počáteční úlohy $(x-1)y' + y^2 = 0\ , y(2) = -1$.

Řešení: Postup při separaci je zřejmý z následujících kroků (přesvědčte se, že rovnici lze zapsat i ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$):

$$(x-1)y' + y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = -y^2 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{x-1}\,.$$

Integrací obdržíme

$$-\frac{1}{y} = -\ln(x-1) + C\,, \qquad \text{odkud} \qquad y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - C}\,.$$

Dosadíme-li do získaného obecného řešení z počáteční podmínky $x = 2$, $y = -1$, bude

$$-1 = \frac{1}{\ln 1 - C}\,, \qquad \text{tj.} \qquad C = 1.$$

Nyní můžeme zapsat hledané řešení počáteční úlohy:

$$y_p(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - 1}\,.$$

1. Řešte následující separovatelné rovnice:

a) $y' \sin x = y \cos x$,

b) $x^2 y' - y^2 = 1$,

c) $2xyy' = x + 2$,

d) $(x + y)y' = 1$.

3. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $y' + \mathrm{e}^y = 0, \quad y(0) = 0$,

b) $(x + y)y' = x - y, \quad y(5) = 2$,

Příklad. Vypočtěme řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{2xe^{x^2}}{(1+y^2)e^y}$$

vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 0$.

Řešení:

1. a) $y = C.\sin x$, b) $y = \mathrm{tg}\,(C - \frac{1}{x})$, c) $y^2 = x + 2\ln x + C$,

d) $y - \ln(x + y + 1) = C$.

2. a) $y = -\frac{x}{\ln x + C}$, b) $y = x\mathrm{e}^{Cx+1}$, c) $y = x(\ln x + C)^2$.

3. a) $y = \ln(1 - x)$, b) $x^2 - 2xy - y^2 = 1$,

2) ***Lineární diferenciální rovnice 1. řádu***

Definice 8.3.1.

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR) je každá rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)\,,$$

kde $p(x)$, $q(x)$ jsou funkce spojité na množině $M \subseteq \mathbb{R}$, v níž hledáme řešení. Je-li $q(x) = 0$ na M, nazývá se

$$y' + p(x)y = 0$$

zkrácenou lineární rovnicí nebo také rovnicí **bez pravé strany**. V opačném případě hovoříme o **úplné lineární rovnici**.

(V našem případě nazveme „zkrácenou lineární rovnici“ jako **rovnici homogenní**)

Věta 8.3.1.

Zkrácená lineární rovnice má obecné řešení

$$\hat{y}(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}\,.$$

Důkaz: Ve zkrácené rovnici lze proměnné snadno separovat, a proto

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = \int p(x)\,dx + \ln C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}\,.$$

Příklad A Určete řešení následující diferenciální rovnice:

$$y' + y \cdot x = 0$$

Věta 8.3.2.
Obecné řešení úplné lineární rovnice má obecné řešení

$$y(x) = \hat{y}(x) + v(x) ,$$

kde $\hat{y}(x)$ je řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení úplné lineární rovnice.

metoda variace konstanty. Její princip spočívá v realizaci předpokladu, že řešení zkrácené rovnice

$$\hat{y}(x) = C.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

bude vyhovovat rovnici úplné, jestliže nahradíme konstantu C vhodnou funkcí, kterou určíme výpočtem. Budeme tedy předpokládat, že

$$y(x) = C(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

Umíme-li stanovit řešení zkrácené LDR (zpravidla to není obtížné), zbývá nalézt způsob určení partikulárního integrálu $v(x)$. Seznámíme se s postupem nazývaným

je hledaným řešením a dosadíme tuto funkci do úplné rovnice:

$$\underbrace{C'(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} - C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}.p(x)}_{y'(x)} + \underbrace{C(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}}_{y(x)}.p(x) = q(x) .$$

Na levé straně se odečtou členy obsahující funkci $C(x)$, takže zůstane pouze vztah

$$C'(x).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx} = q(x) , \qquad \text{odkud} \qquad C'(x) = q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} .$$

Finální tvar funkce $C(x)$ stanovíme opět integrací:

$$C(x) = \int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} + K$$

s definitivní konstantou K. Tento výsledek nyní dosadíme do výrazu pro řešení zkrácené rovnice, abychom získali obecné řešení úplné rovnice:

$$y(x) = \left(\int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} + K \right).\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}$$

Po roznásobení obdržíme konečnou podobu hledaného řešení, která odpovídá očekávanému tvaru:

$$y(x) = \underbrace{K.\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}. \int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx}}_{v(x)} \; .$$

Tím jsme v podstatě provedli konstruktivní důkaz následujícího tvrzení o podobě řešení lineární rovnice.

Věta 8.3.3.
Úplná lineární rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ má obecné řešení $y(x) = \hat{y}(x) + v(x)$ tvořené součtem řešení zkrácené rovnice a partikulárního integrálu

$$v(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,dx}. \int q(x).\mathrm{e}^{\int p(x)\,dx} \; .$$

Příklad B Určete řešení následující diferenciální rovnice:

$$y' + y \cdot x = 2x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Řešení: $y = e^{x^2/2} + K \cdot e^{-x^2/2}$

Příklad 8.3.1. Najděte obecné řešení rovnic $xy' - y = 2x^3$.

Řešení: Přepíšeme-li zadání do tvaru

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 \, ,$$

vidíme, že jde o lineární rovnici, v níž $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = x^2$. Při jejím řešení budeme postupovat podrobně podle kroků popsaných v odvození.

1. Nejprve vyřešíme separací proměnných zkrácenou rovnici:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y| = \ln|x| + C \, ,$$

odkud

$$\hat{y} = Cx \; .$$

2. Nyní přistoupíme k variaci konstanty, při níž budeme předpokládat, že $y(x) = C(x).x$. Tuto funkci a její derivaci $y'(x) = C'(x).x + C(x)$ dosadíme do úplné rovnice:

$$x.\,(C'(x).x + C(x)) - (C'(x).x + C(x)) = 2x^3\,.$$

Vzhledem k tomu, že byl dosavadní postup správný, vyruší se členy $\pm C(x).x$ a lze pokračovat dalšími kroky:

$$C'(x).x^2 = 2x^3 \qquad \Longrightarrow \qquad C(x) = \int 2x\,dx = x^2 + K\,.$$

3. Získaný výsledek dosadíme zpět do řešení zkrácené rovnice a po drobné úpravě dostáváme hledané obecné řešení:

$$y(x) = (x^2 + K).x = Kx + x^3\,.$$

4. Na závěr provedeme zkoušku dosazením do levé strany zadané rovnice:

$$x(K + 3x^2) - Kx - x^3 = 2x^3\,,$$

což je rovno výrazu na pravé straně.

Příklad 8.3.2. Řešte počáteční úlohu $y'\sin x - y\cos x = \sin^3 x,\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$.

Řešení: Opět se nejprve ujistíme, že jde o lineární rovnici:

$$y' - y\,\frac{\cos x}{\sin x} = \sin^2 x\,, \qquad \text{tj.} \quad p(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}\,, \quad q(x) = \sin^2 x\,.$$

1. Zkrácená rovnice:

$$y' = y\,\frac{\cos x}{\sin x} \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C\,.$$

Řešení zkrácené rovnice:

$$\hat{y} = C.\sin x\,.$$

2. Variace konstanty:

$$y = C(x).\sin x\,, \qquad y' = C'.\sin x + C.\cos x\,.$$

Dosazení do úplné rovnice:

$$(C'.\sin x + C.\cos x).\sin x - C.\sin x.\cos x = \sin^3 x \ ,$$

$$C' \sin^2 x = \sin^3 x \qquad \Longrightarrow \qquad C(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + K \, .$$

3. Zpětné dosazení:

$$y(x) = (-\cos x + K).\sin x = K \sin x - \sin x \cos x \ .$$

4. Počáteční úloha pro $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = K \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2} = K\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad K = \sqrt{2} \, .$$

Výsledné řešení má tedy tvar

$$y_p(x) = \sqrt{2} \sin x - \sin x \cos x \, .$$

1. Najděte obecné řešení:

a) $y' - y = \mathrm{e}^{2x}$,

b) $y' - \frac{x+1}{x} y = x^2$,

c) $(x^2 + 1)y' - 2xy = x^2$.

2. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $xy' - y = \sqrt{x}$, $\quad y(4) = 12$,

b) $y' + y.\mathrm{cotg}\, x = 1$, $\quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$,

c) $x^2 y' + xy = \ln x$, $\quad y(1) = \frac{1}{2}$.

Řešení:

1. a) $y = K\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$, $\qquad$ b) $y = Kx\mathrm{e}^x - x^2 - x$,

c) $y = K(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(x - \mathrm{arctg}\, x)$.

2. a) $y = 2x\sqrt{x} - x$, $\qquad$ b) $y = \mathrm{cotg}\, x$, $\qquad$ c) $y = \frac{1 + \ln^2 x}{2x}$.