13. hodina *(MA2-E)*

Zkrácená lineární rovnice s konstantními koeficienty

nebo také rovnice **homogenní**.

(k zápočtovému testu nepotřebujete, ke zkouškovému možná ano)

Zaměříme se na **zkrácené rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty**, jejichž obecný tvar je

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0\ ,$$

kde $a_0,\ a_1,\ a_2$ jsou reálné koeficienty. Ukážeme nejprve zásadní skutečnost, že existují řešení této rovnice ve tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{rx}\ ,$$

kde r je zatím nespecifikovaná konstanta. Snadno určíme derivace

$$y'(x) = r\mathrm{e}^{rx}\ , \quad y''(x) = r^2\mathrm{e}^{rx}\ ,$$

které dosadíme do původní rovnice. Po vydělení výrazem e^{rx} dostáváme

$$a_2\, r^2 + a_1\, r + a_0 = 0\ ,$$

což je kvadratická rovnice pro neznámou r. Tento výsledek znamená, že funkce $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ bude řešením diferenciální rovnice právě tehdy, když r bude řešením příslušné algebraické rovnice.

Definice 9.2.1.
Kvadratickou rovnici $a_2\ r^2 + a_1\ r + a_0 = 0$ nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice $a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0$.

Věta 9.2.1.

Mějme lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0\,,$$

s charakteristickou rovnicí $\quad a_2\, r^2 + a_1\, r + a_0 = 0.$

(a) Má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny $r_1,\ r_2$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x},\ y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}\,, \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Má-li charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen r, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{rx},\ y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{rx} + C_2 x \mathrm{e}^{rx} = \mathrm{e}^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right)\,, \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Má-li charakteristická rovnice komplexní kořeny $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\ + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,, \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(c) V tomto případě by měly představovat fundamentální řešení funkce

$$y_1 = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}, \quad y_2 = \mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x}\,,$$

jak se můžeme opět přesvědčit dosazením. Jelikož chceme mít řešení tvořeno reálnými výrazy, použijeme k další úpravě tzv. **Eulerovy vzorce**

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\beta x} = \cos\beta x \pm \mathrm{i}\sin\beta x\,.$$

Po jejich použití vypadá dvojice řešení takto:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x \ ,$$
$$y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x \ .$$

Řešením diferenciální rovnice musí být také každá lineární kombinace těchto funkcí, například dvojice

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x \,, \qquad \tilde{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Příklad 9.2.1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - r - 2 = 0$ má kořeny $r_1 = 2, \ r_2 = -1$. Fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = e^{2x}, \ y_2 = e^{-x}$, obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 \, e^{2x} + C_2 \, e^{-x} \ .$$

Příklad 9.2.2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 4r + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $r = 2$. Fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = e^{2x}, \ y_2 = x e^{2x}$, obecné řešení napíšeme například ve tvaru

$$y(x) = C_1 \, e^{2x} + C_2 \, x e^{2x} \ .$$

Příklad 9.2.3. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 6r + 13 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $r_{1,2} = 3 \pm 2\mathrm{i}$. Fundamentální systém v reálném oboru budou podle tvrzení (c) předchozí věty tvořit funkce $y_1 = \mathrm{e}^{3x} \cos 2x$, $y_2 = \mathrm{e}^{3x} \sin 2x$, obecné řešení zapíšeme ve tvaru

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{3x} \cos 2x + C_2 \mathrm{e}^{3x} \sin 2x.$$

2. Najděte obecná řešení rovnic s konstantními koeficienty:

a) $4y'' - y = 0$, b) $y'' + 7y' + 10y = 0$,

c) $4y'' + y = 0$, d) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

3. Řešte počáteční úlohy:

a) $y'' - y' - 12y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -1$,

b) $y'' + y = 0$, $y(\pi) = y'(\pi) = 2$,

c) $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -12$.

Řešení:

2. a) $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$, b) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-5x}$,

c) $y = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}$, d) $y = e^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

3. a) $y = 2e^{4x} + 3e^{-3x}$, b) $y = -2 \cos x - 2 \sin x$, c) $y = 3e^{-4x} - 3$.