

Vektory a vektorový prostor

Definice. Jsou dány dva n -složkové vektory $\vec{v}, \vec{w}$ a reálné číslo r . Definujeme následující početní operace (úkony) s vektory:

součet vektorů	$\vec{v} + \vec{w}$	složky výsledku se vypočtou jako $v_i + w_i$
rozdíl vektorů	$\vec{v} - \vec{w}$	složky výsledku se vypočtou jako $v_i - w_i$
r -násobek vektoru	$r \cdot \vec{v}$	složky výsledku se vypočtou jako $r \cdot v_i$
skalární součin vektorů	$\vec{v} \cdot \vec{w}$	výsledek je číslo $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \dots + v_n \cdot w_n$
norma vektoru	$\ \vec{v}\ $	výsledek je číslo $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$
dělení vektorů	- - -	není definováno

Ukázky: Pro čtyřsložkové vektory $\vec{v} = (1, 2, 6, -1)$, $\vec{w} = (0, 4, -3, 0)$ bude $\vec{v} + \vec{w} = (1, 6, 3, -1)$, $2\vec{v} - \vec{w} = (2, 0, 15, -2)$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 = -10$, $\|\vec{w}\| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

Příklad Množina $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}, \text{ kde } i = 1, \dots, n; n \in \mathbf{N}\}$, v níž jsou operace definovány vztahy

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n), k \in \mathbf{R},$$

je vektorový prostor, jehož prvky, vektory, jsou uspořádané n -tice reálných čísel

$$(x_1, \dots, x_n).$$

Definice. Množina V_n všech uspořádaných n -tic reálných čísel, na které jsou definovány operace sčítání a násobení reálným číslem vztahy

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \quad c\mathbf{a} = (c a_1, \dots, c a_n),$$

se nazývá aritmetický lineární prostor. Prvky V_n , tj. uspořádané n -tice reálných čísel, se nazývají aritmetické vektory.

Definice 2.1.2.

Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ nazýváme **lineárně nezávislé**, jestliže rovnice

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0 \quad (1)$$

je splněna pouze v případě, že skaláry $c_1, \dots, c_n$ jsou všechny rovny 0. Jestliže je rovnice (1) splněna a alespoň jeden ze skalárů $c_1, \dots, c_n$ je různý od nuly, říkáme, že vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou **lineárně závislé**.

Příklad Vektory $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ a $(1, 0, 0)$ jsou lineárně nezávislé. Najít čísla c_1, c_2, c_3 splňující rovnici

$$c_1(1, 1, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 0, 0) = (c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_2, c_1) = (0, 0, 0)$$

vede k řešení soustavy

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

$$c_1 + c_2 = 0,$$

$$c_1 = 0,$$

která má jediné řešení $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$.

Příklad Vektory $(1, 2, 4)$, $(2, 1, 3)$ a $(4, -1, 1)$ jsou lineárně závislé. Nalezení čísel c_1, c_2, c_3 splňujících rovnici

$$c_1(1, 2, 4) + c_2(2, 1, 3) + c_3(4, -1, 1) = (c_1 + 2c_2 + 4c_3, 2c_1 + c_2 - c_3, 4c_1 + 3c_2 + c_3) = (0, 0, 0)$$

vede nyní k řešení soustavy rovnic

$$c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0,$$

$$2c_1 + c_2 - c_3 = 0,$$

$$4c_1 + 3c_2 + c_3 = 0,$$

která má například řešení $c_1 = 2, c_2 = -3, c_3 = 1$. Takových řešení je nekonečně mnoho tvaru $c_1 = 2t, c_2 = -3t, c_3 = t, t \in \mathbf{R}$.

Definice 2.1.3.

Vektorový prostor V se nazývá **n -dimenzionální** nebo také **prostor dimenze n** ($n > 0$), existuje-li ve V n lineárně nezávislých vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n$ a platí-li, že každý vektor $z \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $v_1, \dots, v_n$.

Definice 2.1.4.

Každou množinu n lineárně nezávislých vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n \in V_n$ nazýváme **bází** ve V_n a zapisujeme $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.

Příklad Uvažujme aritmetický vektorový prostor $\mathbf{R}^n$. Označíme-li $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$, pak pro každé $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$ platí $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$. Je snadno vidět, že vektory $e_1, e_2, \dots, e_n$ jsou lineárně nezávislé a tedy $\mathbf{R}^n$ je vektorový prostor dimenze n .

Příklad Určete souřadnice vektoru $a = (1, 2)$ z $V_2 = \mathbf{R}^2$

a) vzhledem k bázi $\langle (1, 1), (-1, 0) \rangle$,

b) vzhledem k bázi $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle$.

Definice 2.1.5.

Jestliže $V' \subset V$ a jsou splněny podmínky:

(1) $kx \in V'$ pro všechna $x \in V'$ a $k \in \mathbf{R}$,

(2) $x + y \in V'$ pro všechna $x, y \in V'$,

pak V' nazveme vektorovým **podprostorem** vektorového prostoru V .

Jinak řečeno: pokud dva vektory patří do podprostoru V , pak jejich součet, rozdíl nebo násobek také musí patřit do podprostoru V .

Příklad Necht' $V' = \{(x, 1); x \in \mathbf{R}\}$, pak V' není podprostorem prostoru $\mathbf{R}^2$.

Platí:

$$(1) \quad k(x, 1) = (kx, k) \notin V', \text{ pro } x \in \mathbf{R},$$

$$(2) \quad (x, 1) + (y, 1) = (x + y, 2) \notin V', \text{ pro } x, y \in \mathbf{R}.$$

1. Určete aritmetický vektor x , pro který platí:

$$a) \quad x = 3a + 5b - c, \text{ je-li } a = (4, 1, 3, -2), b = (1, 2, -3, 2), c = (16, 9, 1, -3),$$

$$b) \quad x = -a + 4b - 6c + 2d, \text{ je-li } a = (1, 1, -1, -1), b = (0, 0, 0, 0), c = \left(\frac{1}{2}, 0, 1, 4\right), \\ d = (-1, -1, 1, 1),$$

6. Najděte všechny hodnoty t , pro které je možno vektor u vyjádřit jako lineární kombinace vektorů a, b, c :

$$a) \quad u = (5, 3, t), \quad a = (1, 0, 2), \quad b = (0, 1, 1), \quad c = (4, 1, 9),$$

$$b) \quad u = (4, 3, t), \quad a = (1, 2, 3), \quad b = (2, -1, 1), \quad c = (1, 7, 8),$$

$$c) \quad u = (t, 6, 7), \quad a = (1, 4, 5), \quad b = (3, 8, 10), \quad c = (0, -4, -5),$$

$$d) \quad u = (1, 3, 5), \quad a = (1, 3, 4), \quad b = (2, 8, -2), \quad c = (3, 11, t).$$

7. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé a v kladném případě vyjádřete jeden z nich jako lineární kombinaci ostatních:

$$a) \quad a = (1, 2, 3), \quad b = (3, 6, 7),$$

$$b) \quad a = (4, -2, 6), \quad b = (6, -3, 9),$$

$$c) \quad a = (5, 4, 3), \quad b = (3, 3, 2), \quad c = (8, 1, 3),$$

$$d) \quad a = (0, 1, 0, 3), \quad b = (3, 0, 1, 0), \quad c = (0, 3, 0, 1).$$

8. Určete číslo t tak, aby vektory u, v, w byly lineárně závislé:

$$a) \quad u = (2, 1, 3), \quad v = (1, 2, -5), \quad w = (3, 0, t),$$

$$b) \quad u = (1, 2, 2), \quad v = (2, t, 3), \quad w = (2, 5, 4),$$

$$c) \quad u = (-1, t, 2), \quad v = (1, 1, 2), \quad w = (3, 0, t),$$

$$d) \quad u = (4, 5, 2), \quad v = (2, 2t, t), \quad w = (2, 10-6t, 4-3t).$$

9. Necht' V je vektorový prostor funkcí definovaných a spojitých v daném intervalu. Zjistěte, zda jsou funkce (vektory) v daném intervalu lineárně závislé nebo nezávislé:
- a) $a = e^x$, $b = x$, $x \in \mathbf{R}$,
 - b) $a = x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, $b = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}$, $c = x^2 + x - 2$, $x \in \mathbf{R}$,
 - c) $a = \sin x$, $b = \cos x$, $x \in < 0, 2\pi >$,
 - d) $a = 2\cos^2 x$, $b = -\cos 2x$, $c = -1$, $x \in < -\pi, \pi >$.
10. Mezi danými vektory najděte maximální počet lineárně nezávislých a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci:
- a) $a = (1, 2, 0, 0)$, $b = (1, 2, 2, 4)$, $c = (3, 6, 0, 0)$,
 - b) $a = (1, 2, 3)$, $b = (2, 3, 4)$, $c = (3, 2, 3)$, $d = (4, 3, 4)$, $e = (1, 1, 1)$,
 - c) $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (2, 1, 1, -1)$, $w = (1, -1, 0, -1)$, $x = (1, 0, -1, 2)$.
11. Zjistěte, zda dané vektory tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$. V kladném případě vyjádřete vektor $a = (1, 1, 2)$ jako jejich lineární kombinaci a stanovte souřadnice vektoru a v dané bázi:
- a) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (2, 0, 0)$,
 - b) $u_1 = (0, 1, -1)$, $u_2 = (0, 2, -2)$, $u_3 = (1, 1, 3)$,

Řešení některých úloh:

- 6. a) $t = 13$, b) $t = 7$, c) pro žádné t , d) $t \neq 2$.
- 7. a) nezávislé, b) závislé, $b = \frac{3}{2}a$, c) závislé, $c = 7a - 9b$, d) nezávislé.
- 8. a) $t = 11$, b) neexistuje, c) $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, d) t libovolné.

9. a) nezávislé, **b)** závislé, např. $2a - 3b - c = 0$, **c)** nezávislé, **d)** závislé, např.

$$a + b + c = 0.$$

10. a) $a, b; c = 3a + 0b$ nebo $b, c; a = 0b + \frac{1}{3}c$, **b)** mimo trojice $a, b, e; c, d, e$ jsou

libovolné tři trojice lineárně nezávislé. Např. $a, b, c; d = -a + b + c$,

$e = -a + b + 0c$, **c)** např. $u, v, w; x = 2u - v + w$.

11. a) ano, $a = 2u_1 - u_2$, a má souřadnice $(2, -1, 0)$, **b)** ne, **c)** ano, $a = u_1 - u_2 + \frac{2}{3}u_3$,
 a má souřadnice $(1, -1, \frac{2}{3})$.

Příklad. Mějme vektory $a_1 = (0, 2, 7)$, $a_2 = (0, 3, 2)$ a $a_3 = (1, 3, 2)$ z aritmetického lineárního prostoru V_3 . Máme rozhodnout, zda vektor a_3 je lineární kombinací vektorů a_1, a_2 .

Aritmetické vektory:

1. Rozhodněte, zda jsou následující skupiny vektorů z prostoru $\mathbb{R}^4$ lineárně závislé nebo nezávislé:

(i) $a = (1, 0, 0, 1)$

(ii) $o = (0, 0, 0, 0)$

(iii) $a = (1, 0, 0, 1)$, $b = (1, 2, -4, 3)$

(iv) $a = (1, 0, 0, 1)$, $b = (1, 2, -4, 3)$, $c = (3, 4, -8, 7)$

(v) $a = (1, 0, 0, 1)$, $b = (1, 2, -4, 3)$, $d = (1, -2, -1, 0)$

(vi) $a = (1, 0, 0, 1)$, $b = (1, 2, -4, 3)$, $o = (0, 0, 0, 0)$

(vii) $a = (1, 0, 0, 1)$, $b = (1, 2, -4, 3)$, $d = (1, -2, -1, 0)$, $e = (2, 1, -1, 7)$

(viii) $a = (1, 0, 0, 1)$, $b = (1, 2, -4, 3)$, $d = (1, -2, -1, 0)$, $e = (2, 1, -1, 7)$, $f = (9, 8, 7, 4)$

2. V prostoru $\mathbb{R}^3$ vyjádřete vektor $w = (5, 4, 7)$ jako lineární kombinaci vektorů $x = (1, 2, 3)$, $y = (1, 0, 1)$, $z = (0, 0, 1)$.

3. V prostoru $\mathbb{R}^3$ vyjádřete vektor $p = (0, 1, 3)$ jako lineární kombinaci vektorů $m = (1, 1, 1)$, $n = (-1, 0, 1)$, $p = (0, 1, 2)$.

4. V prostoru $\mathbb{R}^4$ vyjádřete vektor $q = (2, 1, 1, 0)$ jako lineární kombinaci vektorů $r = (1, 0, 1, 0)$, $s = (0, 1, 0, 1)$, $t = (1, 0, 0, 0)$.