5. hodina ***(MA2-E)***

Matice (Regulární / Singulární)

Čtvercovou matici A nazýváme **regulární**, právě když je její hodnost $h(A)$ rovna jejímu stupni, tj. platí:

$$h(A) = n.$$

Příklad 28. *Která z následujících matic je regulární?*

$$a)\ A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b)\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$c)\ A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad d)\ A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Čtvercovou matici, která není regulární, nazýváme **singulární**.

---

1. Zjistěte, zda matice $\mathbf{A}$ je singulární:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) ano, b) ne.

2. Zjistěte, zda matice $\mathbf{B}$ je regulární:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) ano, b) ne.

1. b); 2. a);

Matice (výpočet inverzní matice)

Definice 2.4.1.

Inverzní maticí k čtvercové matici $\mathbf{A}$ řádu n rozumíme takovou čtvercovou matici $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n, pro kterou platí: $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} .\, \mathbf{A} = \mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice řádu n.

Jsou tři základní metody výpočtu inverzní matice:

1) Sestavením n-rovnic pro n neznámých (příklad níže)
2) Řešení těchto n-rovnic pro n neznámých lze elegantně provést Gauss-Jordanovou eliminací
3) Nakonec existuje výpočet inverzní matice pomocí determinantu, ale to teď uvádět nebudeme.

Nechť A je čtvercová matice stupně n. Matice X téhož stupně se nazývá **inverzní maticí k matici** A, jestliže platí

$$X \cdot A = A \cdot X = I,$$

kde I je jednotková matice stupně n. Inverzní matici značíme

$$A^{-1}.$$

Příklad 29. *Určete neznámou matici X, která je řešením rovnice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Řešení: Neznámou matici X můžeme zapsat obecně takto:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Potom lze rovnici (1) psát ve tvaru:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kterému odpovídají následující dvě soustavy, lišící-se jenom pravými stranami:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & = & 1 \\ 4x_1 + 3x_3 & = & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_2 + 2x_4 & = & 0 \\ 4x_2 + 3x_4 & = & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Tyto soustavy řešíme najednou, pomocí Gaussovy-Jordanovy eliminace jedné společné „rozšířené“ matice:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right].$$

Potom:

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Ze zadání příkladu je zřejmé, že nalezená matice X je matice inverzní k matici A.

(Výše uvedené dva páry rovnic o dvou neznámých x_1, x_2 a x_3, x_4 můžete řešit klasicky – každý pár vyřešit zvlášť a pak dosadit. Výhoda výše uvedeného postupu je, že je kratší. Nevýhodou je určitá abstrakce – matice nalevo má dvojí význam – reprezentuje proměnné x_1, x_3 a také proměnné x_2, x_4.)

Gauss-Jordanova metoda:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Inverzn%C3%AD_matice

Inverzní matice k reálné matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

lze získat následujícím provedením Gaussovy–Jordanovy eliminace:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Nejprv je eliminována 2 pod diagonálou, což se provede odečtením dvojnásobku prvního řádku od druhého řádku. Potom je eliminována 2 nad diagonálou, což se provede přičtením dvojnásobku druhého řádku k prvnímu řádku. V posledním kroku je pak druhý diagonální prvek normalizován na jedničku, což znamená, že se druhý řádek se vynásobí -1. Inverzní maticí k $\boldsymbol{A}$ je:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Najděte Inverzní matici Gaussovou metodou:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice k $\boldsymbol{A}$ je:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vypočítejte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ a proveďte zkoušku:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

Řešení:

1. a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}^{-1}$ neexistuje (det $\mathbf{A} = 0$), e) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

Maticové rovnice

Maticové rovnice

Příklad 31. *Jsou dány matice* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. *Najděte neznámou matici* X *tak, aby platilo:*

a) $AX = B$,

b) $XA = B$.

https://www.priklady.eu/cs/matematika/matice.alej

19. Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 12 \end{aligned}$$

---

20. Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} y - z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= 6 \\ 4x - 4y + 5z &= 11 \end{aligned}$$

2. Řešte rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -24 & 3 \\ -44 & 15 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

2. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{X} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & -7 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}$.