6. hodina (MA2-E)

1) Maticový zápis soustavy lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Jestliže zavedeme matice

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},
$$

lze soustavu (1) psát ve tvaru $\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá **matice soustavy**

Možné řešení:

Vynásobíme rovnici $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{X} = \mathbf{B}$ zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ a dostaneme

$\mathbf{A}^{-1} . \mathbf{A} . \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{B}$ a tedy $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{B}$.

Příklad Řešme soustavu pomocí inverzní matice.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -7 \\
2x_1 \qquad\quad + x_3 &= 1 \\
4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -11.
\end{aligned}
$$

Řešení:

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -2 & 11 & -5 \\ -4 & -10 & 6 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} . \mathbf{B} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -2 & 11 & -5 \\ -4 & -10 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 32 \\ 80 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.
$$

https://www.priklady.eu/cs/matematika/matice.alej

19. Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 12 \end{aligned}$$

---

20. Pomocí inverzní matice řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} y - z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= 6 \\ 4x - 4y + 5z &= 11 \end{aligned}$$

2) Determinanty

Definice 2.3.1.

Determinantem (řádu n) **čtvercové matice** $\mathbf{A}$ řádu n, jejímiž prvky a_{ij} jsou reálná (popř. komplexní) čísla, nazýváme ***číslo***, které značíme ***det*** $\mathbf{A}$; $|\mathbf{A}|$ a definujeme takto:

1. Je-li $n = 1$, pak $\det \mathbf{A} = a_{11}$.
2. Pro $n \geq 2$ je

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \mathbf{A}_{1j} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

kde matice $\mathbf{A}_{1j}$ vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynecháním prvního řádku a j-tého sloupce.

Determinant můžete spočítat podle libovolného řádku nebo sloupečku. Výše je ukázán výpočet podle prvního řádku. Řádek nebo sloupeček volíme tak, aby byl výpočet co nejsnazší (hodně nul). *Před výpočtem také můžeme matici upravit tak, aby byl výpočet jednodušší.* Tyto úpravy nesmí ale změnit hodnotu determinantu. Tuto podmínku splňuje například odečtení nebo přičtení libovolného násobku jednoho řádku ke druhému.

Pokud se nám podaří upravit *čtvercovou matici na trojúhelníkový tvar, pak výpočet determinantu lze redukovat na součin čísel na hlavní diagonále* (ověřte si to u matice 3 krát 3).

Pokud však jeden řádek vynásobíte nenulovým číslem (např. dvěma) vynásobíte tímto číslem i hodnotu determinantu (zvětší se dvakrát). Tyto úpravy můžete použít, ale na závěr musíte provést korekci (výsledný determinant vydělit dvěma).

1. Pro matici $\mathbf{A}$ řádu $n = 2$ platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

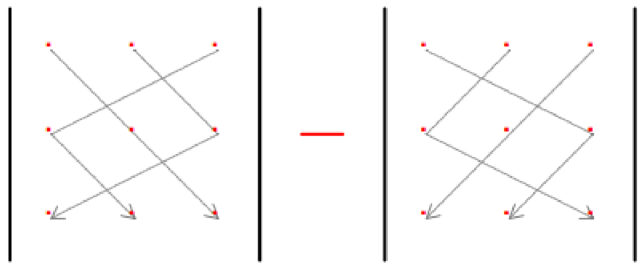
2. Pro matici $\mathbf{A}$ řádu $n = 3$ platí

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

Tento výpočet si snadno zapamatujeme podle tzv. ***Sarrusova pravidla***:



Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Příklad Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Úpravy, které mění hodnotu determinantu předvídatelným způsobem:</u>

Věta 2.3.2. Jestliže matice $\mathbf{B}$ vznikne tak, že některý řádek (sloupec) čtvercové matice $\mathbf{A}$ vynásobíme číslem $k \in \mathbf{R}$, pak platí $\det \mathbf{B} = k.\det \mathbf{A}$.

Věta 2.3.3. Vyměníme-li ve čtvercové matici $\mathbf{A}$ navzájem dva řádky (sloupce), pak pro takto vzniklou matici $\mathbf{B}$ platí: $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

Další fakta:

Věta 2.3.4. Má-li matice $\mathbf{A}$ dva řádky (sloupce) stejné, pak det $\mathbf{A}$ = 0.

D ů k a z plyne z předcházející věty 3, když oba stejné řádky mezi sebou vyměníme. Dostaneme

$$\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A} \Rightarrow 2\det \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \det \mathbf{A} = 0.$$

Věta 2.3.5. Nechť matice $\mathbf{B}$ vznikne tak, že k p-tému řádku (sloupci) čtvercové matice $\mathbf{A}$ řádu n přičteme k násobek, $k \in \mathbf{R}$, q-tého řádku (sloupce), $p \neq q$. Pak platí

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}\ .$$

Příklad Vypočtěme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Výhodné bude využít rozvoj podle 4. sloupce. Nejdříve 2. řádek násobený číslem (-3) přičteme k řádku třetímu a 2. řádek přičteme k řádku čtvrtému. První a druhý řádek opíšeme:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -7 & -5 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nyní provedeme rozvoj podle 4. sloupce :

$$\det \mathbf{A} = (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tento determinant můžeme vypočíst přímo Sarrusovým pravidlem nebo opět rozvojem podle 3. sloupce po úpravách.

1. Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{24} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{6} \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ a+1 & a-2 \end{vmatrix}$, g) $\begin{vmatrix} \mathrm{tg}x & -1 \\ 1 & \mathrm{tg}x \end{vmatrix}$.

2. Vypočtěte determinanty pomocí Sarrusova pravidla:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} -2 & -6 & 3 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$.

4. Vypočtěte determinanty úpravou na trojúhelníkový tvar:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$.

5. Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & 8 \\ -3 & -5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 & -2 \\ -9 & 6 & 2 & -5 \\ 8 & -6 & 10 & -12 \end{vmatrix}$.

1. **a)** -17, **b)** 10, **c)** 22, **d)** $\sqrt{3}$, **e)** $\frac{9}{2}$, **f)** (1 - 2a), g) $\frac{1}{\cos^2 x}$.

2. **a)** -8, **b)** 50, **c)** -18, **d)** -43, **e)** -125, **f)** $(- x^2 + x)$.

4. **a)** 1, **b)** 0, **c)** -6.

5. **a)** 10, **b)** 6, **c)** 1, **d)** 1, **e)** -40, **f)** 24.

3) Výpočet inverzní matice pomocí determinantu

1. *Determinant matice $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme subdeterminantem vzhledem k prvku a_{ij}.*
2. *Součin $(-1)^{i+j}$. det $\mathbf{A}_{ij}$ nazýváme **algebraickým doplňkem** prvku a_{ij} a značíme*

Věta 2.4.1.

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice řádu $n \geq 2$ a $\mathbf{A}^*$ je matice utvořená z algebraických doplňků $\mathbf{A}^*_{ik}$ prvků $a_{ik} \in \mathbf{A}$. Pak platí

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot (\mathbf{A}^*)^T.$$

Matici $(\mathbf{A}^*)^T$ nazýváme ***adjungovanou*** maticí k matici $\mathbf{A}$ a značíme ji $\tilde{\mathbf{A}}$, tedy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{A}}.$$

Příklad Určeme inverzní matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{matice } \mathbf{A} \text{ je regulární}$$

$$\mathbf{A}^*_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 18 \qquad \mathbf{A}^*_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -24 \qquad \mathbf{A}^*_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$\mathbf{A}^*_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad \mathbf{A}^*_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 \qquad \mathbf{A}^*_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\mathbf{A}^*_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \mathbf{A}^*_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad \mathbf{A}^*_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 18 & -24 & 6 \\ -10 & 15 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & -10 & 2 \\ -24 & 15 & -3 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Vypočítejte inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ a proveďte zkoušku:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

j) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Řešte rovnici pro neznámou matici $\mathbf{X}$:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -24 & 3 \\ -44 & 15 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} . \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} . \mathbf{X} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

1. a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}^{-1}$ neexistuje (det $\mathbf{A} = 0$), e) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

g) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, h) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, i) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

2. a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{X} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & -7 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}$.

4) Cramerovo pravidlo pro řešení soustavy rovnic

https://cs.wikipedia.org/wiki/Cramerovo_pravidlo

U matice 2 krát 2:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & = & b_2 \end{array}$$

$$(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

$$x_1 = \frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad \text{a}$$

$$x_2 = \frac{\det \boldsymbol{A}_2}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Analogicky u vyšších matic.

Determinant – vyřešené příklady

17. Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 9 \\ x - 2y + z &= -2 \\ 3x + 2y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

2)

$$
\begin{aligned}
2x + y - z &= 3 \\
x - 2y + 3z &= 5 \\
3x + y + 2z &= 4
\end{aligned}
$$

Řešení:

$$x = \frac{16}{7}, \quad y = -2, \quad z = -\frac{3}{7}$$

Příklad 34. *Je dána soustava čtyř rovnic o čtyřech neznámých:*

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -5 \\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

Užitím Cramerova pravidla určete hodnotu neznámé x_3*.*