<u>7. hodina</u> (MA2-E) (vlastní čísla matice + kombinatorika)

Vlastní číslo a vlastní vektor

Definice 2.6.1.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice řádu n, kde $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ se nazývá **vlastní** nebo **charakteristické číslo** matice $\mathbf{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^n$ tak, že $\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ se nazývá **vlastní** nebo **charakteristický vektor** příslušný k λ.

Příklad Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

pak

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\,\mathbf{x}.$$

To znamená, že $\lambda = 3$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x} = (2, 1)^T$ je vlastní vektor příslušný k $\lambda =$ $= 3$. Zřejmě také každý nenulový násobek vektoru $\mathbf{x}$ je vlastním vektorem

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{x} = \lambda\, \mathbf{x}, \qquad (1)$$

Rovnici (1) můžeme zapsat ve tvaru

$$(\mathbf{A} - \lambda\, \mathbf{E})\, \mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což představuje soustavu homogenních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} (a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0 \end{array},$$

která má netriviální řešení, právě když $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$. Vypočteme-li předchozí determinant, získáme polynom $p(\lambda)$ stupně n. Tento polynom se nazývá ***charakteristickým polynomem*** a rovnice $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$, ***charakteristickou rovnicí*** matice $\mathbf{A}$. Řešením rovnice $p(\lambda) = 0$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Tak dostaneme n, ne nutně různých, vlastních čísel matice $\mathbf{A}$.

Příklad Určeme vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Charakteristická rovnice má tvar $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Dostaneme $(2 - \lambda)(-2 - \lambda)(2 -\lambda) - 6 - (-2 - \lambda) + 6(2 - \lambda) = 0$, t.j.

$$- \lambda(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Nalezení vlastních vektorů příslušných k vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ pak vede k řešení soustavy rovnic

$$(\mathbf{A} - 0.\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\,,$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-0 & 3 & 1 \\ 1 & -2-0 & 1 \\ 1 & -3 & 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0\,. \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Použitím Gaussovy eliminační metody zjistíme, že ekvivalentní soustava má tvar

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_1 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 0^{\cdot} \end{array}$$

Položíme $x_3 = t$ a dostaneme $x_1 = x_2 = x_3 = t$. Řešení soustavy je tedy tvaru $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$, $t \in \mathbf{C}$.

Podobně pro vlastní číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ budeme řešit soustavu

$$(\mathbf{A} - 1.\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{o},$$

což je soustava

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 1 & -2-1 & 1 \\ 1 & -3 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

atd.

Příklady:

1. Najděte vlastní čísla a k nim příslušné vlastní vektory matice:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$,

i) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, j) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, k) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

l) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Určete vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Řešení:

1. a) $\lambda_1 = 5$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x} = (t, -2t)^T$, b) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x} = (4t, 3t)^T$; $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$,

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t)^T$, d) $\lambda_1 = 3 + 4i$, $\mathbf{x} = (2it, t)^T$; $\lambda_2 = 3 - 4i$, $\mathbf{x} = (-2it, t)^T$,

e) $\lambda_1 = 2 + i$, $\mathbf{x} = (t, (1 + i)t)^T$; $\lambda_2 = 2 - i$, $\mathbf{x} = (t, (1 - i)t)^T$, f) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$,

$\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$, g) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (t, t, 0)^T$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\mathbf{x} = (r, s, -s)^T$, h) $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x} = (t, 0, 0)^T$; $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$; $\lambda_3 = -2$, $\mathbf{x} = (-t, -t, 5t)^T$, i) $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{x} = (7t, 3t, t)^T$; $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x} = (3t, 2t, t)^T$; $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{x} = (t, t, t)^T$, j) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\mathbf{x} = (t, 0, t)^T$, k) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{x} = (r, s, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$; $\lambda_4 = 4$, $\mathbf{x} = (0, 0, 0, t)^T$; l) $\lambda_1 = 3$, $\mathbf{x} = (t, 2t, 0, 0)^T$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{x} = (0, t, 0, 0)^T$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$, $\mathbf{x} = (0, 0, t, 0)^T$,

vždy pro $r, s, t \in \mathbf{C}$.

Kombinatorika

1.2 Variace

Variatio delectat — latinské přísloví, které říká, že změna těší. Pro kombinatoriku je výstižnější překlad „variace těší".

V kombinatorice se často setkáváme s k-člennými skupinami utvořenými z daných n prvků tak, že v nich záleží na pořadí a žádný z daných prvků se v nich neopakuje. Ptáme-li se třeba, kolika možnými způsoby může být mezi osm finalistů olympijského sprintu na 100 m rozdělena zlatá, stříbrná a bronzová medaile, ptáme se vlastně na to, kolika způsoby lze z daných osmi atletů utvořit uspořádanou trojici. Uspořádanou trojicí v tomto případě rozumíme trojici, v níž záleží na tom, kdo z jejích členů dostane zlatou, kdo stříbrnou a kdo bronzovou medaili. Takovéto skupiny se nazývají variace, přesněji k-členné variace z n prvků.

uspořádaná k-tice:	1. člen	2. člen	…	$(k-1)$-ní člen	k-tý člen
možnosti výběru z n prvků:	$\uparrow$ n	$\uparrow$ $n-1$		$\uparrow$ $n-(k-2)$	$\uparrow$ $n-(k-1)$

Podle kombinatorického pravidla součinu je počet všech těchto uspořádaných k-tic roven součinu

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1)) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Počet $V(k,n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$V(k,n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Příklad 6.2.1. Zapište variace bez opakování 2.třídy a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1,2,3\}$.

Řešení: $V_2(3)$: $(1,2), (1,3), (2,3), (2,1), (3,1), (3,2)$,

$$V_2(3) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6.$$

Příklad 6.2.2. Jsou dány cifry $1, 2, 3, 4, 5$. Kolik trojciferných čísel lze z nich sestavit, jestliže se cifry neopakují ?

Příklad 1

K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

a) Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.
b) Kolik z nich má modrý pruh?
c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed?
d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh?

Příklad 1.1.2. Na startu běžeckého závodu je 8 atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?

1.3 Permutace

Klasický příklad permutací několika slabik pochází od Jana Wericha: On byl denegere, degenere, derenege, zkrátka ...

V předcházejícím článku jsme se zabývali k-člennými variacemi z n prvků, tj. uspořádanými k-ticemi, v nichž se každý z daných n prvků vyskytuje nejvýše jednou; pro přirozená čísla k, n přitom platí $k \leq n$, neboť pro $k > n$ nelze z daných n prvků utvořit žádnou uspořádanou k-tici, v níž by se žádný prvek neopakoval. V tomto článku se budeme zabývat uspořádanými n-ticemi sestavenými z daných n prvků, tj. případem $k = n$; takovéto skupiny se nazývají **permutace** (**pořadí**).

Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.

Permutace z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

Počet permutací n prvků bez opakování

$P(n) = n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$

Pro každé přirozené číslo n definujeme:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$0! = 1$$

Příklad 6.3.1. Zapište permutace bez opakování a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$.

Příklad 6.3.2. Kolik přesmyček lze vytvořit použitím všech písmen slova fyzika?

Příklad 1

S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentě vystoupit šest poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet:

a) všech možných pořadí jejich vystoupení;

b) všech pořadí, v nichž vystupuje A po E;

c) všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po E.

1.4 Kombinace

Alpská kombinace se skládá ze sjezdu, slalomu a obřího slalomu, severská z běhu na 15 km a skoku na můstku s normovým bodem 60–70 metrů.

Až dosud jsme se zabývali skupinami vybranými z daných prvků, ve kterých záleželo na pořadí, tj. k-ticemi uspořádanými. Nyní nám půjde o skupiny, ve kterých na pořadí nezáleží; přitom — stejně jako v předchozích případech — budeme požadovat, aby v těchto skupinách byl každý z daných n prvků nejvýše jednou, tj. aby se v nich žádný prvek neopakoval. Chceme-li např. vědět, kolik bude sehráno utkání

Kombinací bez opakování k-té třídy z n prvků nazýváme každou k prvkovou podmnožinu základní množiny M, v níž nezáleží na pořadí prvků.

Počet kombinací bez opakování: $C_k(n) = \binom{n}{k}$, $\quad 0 \le k \le n$, $(k, n \in \mathbf{N})$.

Příklad 6.4.1. Zapište kombinace 2. třídy bez opakováním a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1,2,3\}$.

1. Vypočtěte kombinační čísla

a) $\binom{24}{0}$, b) $\binom{12}{12}$, c) $\binom{15}{1}$, d) $\binom{9}{2}+\binom{9}{3}$.

Příklad 1

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8 × 8 vybrat
- a) trojici políček;
- b) trojici políček neležících v témže sloupci;
- c) trojici políček neležících v témže sloupci ani v téže řadě;
- d) trojici políček, která nejsou všechna téže barvy.

Příklad 2

Určete, kolika způsoby je možno ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou a) právě dvě ženy; b) aspoň dvě ženy.

Příklad 3

V rovině je dáno n bodů, z nichž p leží na jedné přímce; kromě nich žádné tři body na téže přímce neleží. Určete, kolik je těmito body určeno a) přímek; b) trojúhelníků; c) kružnic.

1.5 Variace s opakováním

Variace na dané téma bývají často variacemi s opakováním

Na skupiny, které jsme studovali v předešlých článcích, jsme kladli požadavek, aby každý z daných prvků se v každé této skupině vyskytoval nejvýše jednou. Nyní od tohoto požadavku upustíme — budeme se zabývat skupinami, v nichž se mohou jednotlivé prvky opakovat; znamená to, že v každé k-tici vybrané z daných n prvků může být každý z nich obsažen až k-krát. Pokud v těchto k-ticích záleží na uspořádání, mluvíme o k-členných variacích s opakováním, přesněji o k-členných variacích s opakováním z n prvků.

Počet $V'(k,n)$ všech k-členných variací s opakováním z n prvků je

$$V'(k,n) = n^k.$$

Příklad 2

Určete počet všech podmnožin k-prvkové množiny.

Příklad 3

Určete počet všech nejvýše pěticiferných přirozených čísel. Kolik z nich je menších než 50 000? (Srovnej s příkladem 2, článek 1.2.)

1.6 Permutace s opakováním

Anagram je uskupení písmen, které vznikne přemístěním písmen slova nebo věty, jejíž obsah chceme utajit.
V anagramu AABIIKKMNOORT resp. MINIKABAROTOK je ukryt název této kapitoly (viz úlohu 1.62).

V článku 1.3 jsme se zabývali permutacemi z n prvků, tj. uspořádanými n-ticemi, v nichž je každý z daných n prvků zastoupen právě jednou. Zkoumejme nyní uspořádané skupiny, v nichž je každý z daných n prvků — označme je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — zastoupen aspoň jednou, a to v předem určeném počtu: k_1-krát prvek a_1, k_2-krát prvek a_2, …, k_n-krát prvek a_n. Vypišme pro ilustraci všechny tyto uspořádané sku-

Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

Počet $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \ldots, k_n$-krát, je

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}.$$

Příklad 6.3.3. Zapište permutace s opakováním a určete jejich počet, je-li základní množina $M = \{1, 2, 3\}$ a první prvek se opakuje jednou, druhý se opakuje jednou a třetí dvakrát.

Příklad 6.3.4. Kolik přesmyček lze vytvořit použitím všech písmen slova matematika?

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$ bývá označováno termínem **binomický koeficient**, je-li užíváno ve vztahu pro n-tou mocninu dvojčlenu (binomu).

Jsou-li a,b libovolná čísla a n číslo přirozené, platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

Rozveďte pomocí binomické věty a zjednodušte $(1+\sqrt{2})^4$.

Který člen rozvoje výrazu $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$, $x \neq 0$, neobsahuje x?

9. Užitím binomické věty vypočtěte

a) $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^6$, b) $(1{,}01)^7$ s přesností na tři desetinná místa.

10. Vypočtěte: a) $\binom{7}{2}$, b) $\binom{15}{12}$, c) $\binom{x}{3}$.

11. Kterým kombinačním číslem je možno vyjádřit součty:

a) $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}$, b) $\binom{14}{3}+\binom{14}{10}$, c) $\binom{n}{4}+\binom{n}{5}$.

Řešení některých úloh:

1. a) 1; b) 1; c)15; d) 120. **2.** a) $x \geq 3; x=5$**;** b) $x \geq 1; x=2$. **3.** 12650. **4.** 120. **5.** 120.

6. 216. **7.** 12. **8.** 720. **9.** a) $\frac{a^6}{64}-\frac{a^5b}{16}+\frac{5a^4b^2}{48}-\frac{5a^3b^3}{54}+\frac{5a^2b^4}{108}-\frac{ab^5}{81}+\frac{b^6}{729}$; b) 1,072.

10. a) 21; b) 455**;** c) $\frac{x^3-3x^2+2x}{6}$. **11.** a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{15}{4}$; c) $\binom{n+1}{5}$. **12.** a) $(n+1)n$;

b) $\frac{1}{n-1}$; c) 1. **13.** $n=7$. **14.** $n=2$. **15.** $n=8$. **16.** a) 120; b) 24; c) 48; d) 72.