9. hodina ***(MA2-E)***

Parciální derivace

Příklad 5.1.1. Určete všechny parciální derivace funkce

$$f(x, y) = 3x^4y^2 - 5 \arctan x^2.$$

Řešení: Jedná se o funkci dvou proměnných x, y. Hledáme tedy parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$.

1. Nejdříve budeme derivovat zadanou funkci podle x, proměnnou y budeme považovat za konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3y^2 - \frac{5}{1+x^4}2x = 12x^3y^2 - \frac{10x}{1+x^4}.$$

2. Derivujeme podle y, nyní x budeme považovat za konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y.$$

Příklad 5.1.2. Určete všechny parciální derivace funkce

$$g(x, y, z) = 3x^2 + \frac{x-y}{x+y} - \mathrm{e}^{x-2y+3z}.$$

Řešení: Postupně zadanou funkci derivujeme podle jednotlivých proměnných.

1. Derivujeme podle x, proměnné y, z považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 6x + \frac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} - \mathrm{e}^{x-2y+3z} \cdot 1$$
$$= 6x + \frac{2y}{(x+y)^2} - \mathrm{e}^{x-2y+3z}.$$

2. Derivujeme podle y, proměnné x, z považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} - \mathrm{e}^{x-2y+3z} \cdot (-2) = \frac{-2x}{(x+y)^2} + 2\mathrm{e}^{x-2y+3z}.$$

3. Derivujeme podle z, proměnné x, y považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\mathrm{e}^{x-2y+3z} \cdot 3 = -3\mathrm{e}^{x-2y+3z}.$$

Příklad 5.1.3. Určete hodnoty všech parciálních derivací funkce

$$f = x\mathrm{e}^{-x^2y}$$

v bodě $A = [1, -1]$.

Řešení: Vypočítáme jednotlivé parciální derivace zadané funkce a určíme jejich funkční hodnotu v bodě A přímým dosazením:

1. Derivujeme podle x, proměnnou y považujeme za konstantu, a poté do derivace funkce f podle x, což je opět funkce proměnných x, y, dosadíme bod A:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \mathrm{e}^{-x^2y} + x\mathrm{e}^{-x^2y}(-2xy)\Big|_{A=[1,-1]} = \mathrm{e}^{-x^2y}(1 - 2x^2y)\Big|_{A=[1,-1]} = 3\mathrm{e}.$$

2. Derivujeme podle y, proměnnou x považujeme za konstantu, a poté do derivace funkce f podle y dosadíme bod A:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = x\mathrm{e}^{-x^2y}(-x^2)\Big|_{A=[1,-1]} = -x^3\mathrm{e}^{-x^2y}\Big|_{A=[1,-1]} = -\mathrm{e}.$$

Definice 5.1.2.

Parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ jsou definovány vztahy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nazýváme **smíšené parciální derivace**.

Věta 5.1.2.

Jsou-li smíšené parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak jsou si v tomto bodě rovny, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A).$$

Příklad 5.1.4. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$$z = x^2y + \frac{y^3}{x^4}.$$

Řešení: Nejdříve vypočítáme parciální derivace prvého řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{4y^3}{x^5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{3y^2}{x^4}.$$

Derivujeme ještě jednou podle x i podle y funkce $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y + \frac{20y^3}{x^6},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{6y}{x^4},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2x - \frac{12y^2}{x^5},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x - \frac{12y^2}{x^5}.
\end{aligned}$$

Příklad 5.1.5. Vypočítejte $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, je-li

$$z = y^2 \sin x.$$

Řešení: Zadanou funkci z budeme postupně derivovat dvakrát podle x a poté podle y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \sin x, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -2y \sin x.$$

Úlohy:

1. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.

2. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y) = \tan(x^3 y)$ v bodě $A = [0, \pi]$.

3. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y,z) = e^{xyz} + e^{x+2y+3z} + x^y + y^z$.

4. Určete všechny parciální derivace funkce
$f(x,y,z) = \sin x \cos y + \sin(x+y)\cos(y+z) + \sin z$ v bodě $A = [0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

5. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce
$f(x,y) = y \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{(2x+3y)^3}$.

6. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ v bodě $A = [1, -1]$.

Definice 5.2.2.

Je-li funkce $z = f(x,y)$ diferencovatelná, nazývá se výraz

$$dz = df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

totální diferenciál funkce $z = f(x,y)$.

Věta 5.2.4.

Nechť je funkce $z = f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$. Pak v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ existuje **tečná rovina** ke grafu funkce $z = f(x,y)$ určená rovnicí

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Příklad 5.2.1. Prověřte diferencovatelnost funkce

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2$$

v bodě $A = [-1, 1]$ a nalezněte její totální diferenciál v bodě A.

Příklad 5.2.4. Nalezněte rovnici tečné roviny a normály ke funkce

$$z = 2x^2 + y^2$$

v bodě $\boldsymbol{A} = [1, 1, ?]$.

Další úlohy:

Příklad 5. Vypočtěte parciální derivace funkce f podle všech jejích proměnných v obecném bodě a vyčíslete je v daném bodě A, je-li:

a) $f(x,y) = \frac{\pi}{3}x^2y,\ A = [4,6],$

b) $f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x},\ A = [1,1],$

c) $f(x,y) = x^2y + \frac{y^3}{x^4},\ A = [1,1],$

d) $f(x,y) = x\sin^2 y,\ A = [1,\pi],$

e) $f(x,y) = e^x \sin(2y),\ A = [0,0],$

f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y},\ A = [1,0],$

g) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y},\ A = [1,-1],$

h) $f(x,y) = x^y,\ A = [2,-1],$

Příklad 1. Určete vektor grad f v obecném bodě a v daných bodech:

a) $f(x,y) = 4xy^2 - 6xy + 5,\ A = [1,-1],$

b) $f(x,y) = \frac{2x+3y-5}{x-y+2},\ A = [2,0],$

c) $f(x,y) = \ln(e^x + 2x - 3y),\ A = [1,-1],$

Řešení některých úloh:

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x^2+y^2)$.

2. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y}{\cos^2(x^3y)}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{\cos^2(x^3y)}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = yz\mathrm{e}^{xyz} + \mathrm{e}^{x+2y+3z} + yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz\mathrm{e}^{xyz} + 2\mathrm{e}^{x+2y+3z} + x^y\ln x + zy^{z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy\mathrm{e}^{xyz} + 3\mathrm{e}^{x+2y+3z} + y^z\ln y$.

4. $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x\cos y + \cos(x+y)\cos(y+z)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x\sin y + \cos(x+y)\cos(y+z) - \sin(x+y)\sin(y+z)$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(x+y)\sin(y+z) + \cos z$, $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{1}{4}(2-\sqrt{3})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(A) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} + 3\sqrt{2x+3y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \arcsin\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt{2x+3y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y(1-2x)}{4[x(1-x)]^{\frac{3}{2}}} + 3(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{27}{4}(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} + \frac{9}{2}(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}$.

6. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = \frac{1}{2}$.

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\pi}{3}xy,\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\pi}{3}x^2\right]$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right]$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{4y^3}{x^5},\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{3y^2}{x^4}\right]$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \sin^2 y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x\sin y\cos y\right]$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = e^x\sin(2y),\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2e^x\cos(2y)\right]$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}\right]$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\right]$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1},\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^y\ln x\right]$$

$$\left[\operatorname{grad} f = (4y^2-6y;\ 8xy-6x)\right]$$

$$\left[\operatorname{grad} f = \left(\frac{9-5y}{(x-y+2)^2};\ \frac{5x+1}{(x-y+2)^2}\right)\right]$$

$$\left[\operatorname{grad} f = \left(\frac{e^x+2}{e^x+2x-3y};\ \frac{-3}{e^x+2x-3y}\right)\right]$$