



Platforma „Mathematikus“ a její zařazení při výuce geometrie na 1. stupni ZŠ

Diplomová práce

Studijní program:

Studijní obor:

Autor práce:

Vedoucí práce:

M7503 Učitelství pro základní školy

Učitelství pro 1. stupeň základní školy

Jana Žďánská

Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.

Katedra matematiky a didaktiky matematiky





Zadání diplomové práce

Platforma „Mathematikus“ a její zařazení při výuce geometrie na 1. stupni ZŠ

Jméno a příjmení: **Jana Žďánská**
Osobní číslo: **P17000061**
Studijní program: **M7503 Učitelství pro základní školy**
Studijní obor: **Učitelství pro 1. stupeň základní školy**
Zadávací katedra: **Katedra matematiky a didaktiky matematiky**
Akademický rok: **2019/2020**

Zásady pro vypracování:

Diplomová práce se zaměřuje na možnosti rozvoje prostorové představivosti žáků 1. stupně základní školy s užitím platformy s názvem „mathematikus“. Cíli teoretické části práce jsou shrnutí základních teoretických poznatků o prostorové představivosti obecně, dále zmínění těch období ve vývoji člověka, v nichž je příhodné prostorovou představivost vhodnými způsoby rozvíjet. Dalšími cíli práce jsou představení platformy „mathematikus“ a také geometrických úloh, které jsou do této platformy zařazeny, popsání možností užití platformy „mathematikus“ při výuce geometrie na 1. stupni základní školy. Praktická část práce je věnována sestavení souboru úloh, které by mohly vhodně doplnit, případně rozšířit stávající úlohy uvedené v platformě „mathematikus“. Cílem výzkumné části práce je užití především platformy „mathematikus“, ale případně i navržených doplňujících úloh při výuce geometrie na 1. stupni vybraných základních škol. Je plánováno pozorování, v případě poskytnutých souhlasů i nahrání způsobů řešení zvolených úloh žáky. V závěru práce provést porovnání a sepsat závěrečné zhodnocení, jakými způsoby a jak úspěšně žáci zvolené úlohy řešili.

Rozsah grafických prací:
Rozsah pracovní zprávy:
Forma zpracování práce:
Jazyk práce:

tištěná/elektronická
Čeština



Seznam odborné literatury:

EICHLER, K.-P. u. a.: *Mathematikus.* – 1. Westermann, Braunschweig 1999. 85 s. ISBN-13: 9783141117714
KOUTECKÁ, Lucie. Prostorové origami jako didaktické prostředí v matematickém vzdělávání. Plzeň, 2012. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni
MOLNÁR, Josef. Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. 2., rozš. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2009. ISBN 978-80-244-2254-1.
MOLNÁR, Josef, PERNÝ, Jaroslav a STOPENOVÁ, Anna. Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji. In Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu. 1. vyd. Praha: JČMF, 2006. ISBN 80-7015-085-8.
ŠAROUNOVÁ, Alena. Geometrická představivost. Praha, 1982. Disertační práce. Univerzita Karlova v Praze.
VORDERMAN, C.: *Help Your Kids with Maths.* Dorling Kindersley Limited, London 2014. 264 p. ISBN 978-1-4093-5571-7
sady učebnic a pracovních sešitů Matematiky pro 1. stupeň ZŠ
www.kleineschule.com.de/mathe3klasse.html
www.mathematikus.de

Vedoucí práce:

Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání práce:

8. ledna 2020

Předpokládaný termín odevzdání:

1. května 2022

L.S.

prof. RNDr. Jan Pícek, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.
vedoucí katedry

V Liberci dne 24. března 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci jsem vypracovala samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé diplomové práce a konzultantem.

Jsem si vědoma toho, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má diplomová práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědoma následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

25. dubna 2022

Jana Žďánská

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí své diplomové práce Mgr. Daniele Bímové, Ph.D. za její ochotný přístup, cenné metodické rady, připomínky a za čas, který mi věnovala během psaní této práce. Také bych chtěla poděkovat paní ředitelce Mgr. Daně Bělohlávkové a žákům vybraných tříd ze Základní a Mateřské školy Březno za možnost uskutečnění pilotního a ostrého testování týkajícího se využití webové platformy Mathematikus při výuce.

Anotace

Diplomová práce se zaměřuje na možnosti rozvoje prostorové představivosti žáků 1. stupně základní školy s užitím interaktivní webové stránky Mathematikus. V teoretické části jsou shrnuty základní teoretické poznatky o prostorové představivosti, jsou zmíněna období vývoje člověka, v nichž je vhodné prostorovou představivost rozvíjet. V praktické části je představen soubor úloh, které by mohly sloužit k doplnění či rozšíření stávajících úloh platformy Mathematikus. Nejdůležitější součástí celé diplomové práce je pozorování žáků během pilotního a ostrého testování, která jsou vyhodnocena na základě tzv. případové studie. Jsou popsány způsoby řešení úloh testovanými žáky 5. ročníku vybrané Základní školy, jsou také uvedeny úspěšnosti řešení zadaných úloh, a to jak v pilotním, tak i v ostrém testování.

Klíčová slova

prostorová představivost, platforma Mathematikus, geometrická úloha, matematika

Anotation

The diploma thesis focuses on the possibilities of developing the spatial visualization of primary school pupils using the interactive website Mathematikus. The theoretical part summarizes the basic theoretical knowledge about spatial visualization, mentions the periods of human development in which it is appropriate to develop spatial visualization. The practical part of the thesis presents a set of tasks that could be used to supplement or expand the existing tasks of the Mathematikus platform. The most important part of the whole thesis is the observation of pupils during the pilot and sharp testing. These are evaluated on the basis of a so-called case study. The methods of solving tasks by tested pupils of the 5th class of the selected primary school are described, and the successes of solving individual assigned tasks are also presented, both in pilot and in sharp testing.

Keywords

spatial visualization, platform Mathematikus, geometric problem, Mathematic

Obsah

Úvod	13
1 Prostorová představivost	15
1.1 Související pojmy	16
1.2 Základní teoretické poznatky o prostorové představivosti.....	18
1.3 Rozvoj prostorové představivosti u žáků 1. stupně.....	20
1.4 Způsoby rozvoje prostorové představivosti během vývoje člověka	24
1.5 Geometrické objekty	28
2 Mathematikus	32
2.1 Projekt iTEM.....	32
2.2 Prostředí Mathematikusu	35
2.3 Příklady úloh	38
2.4 Možnosti využití Mathematikusu ve výuce	42
3 Náměty úloh k rozšíření stávajících úloh zařazených v Mathematikusu	44
3.1 Úlohy pro téma „Krychlová tělesa“	45
3.2 Úlohy pro téma „Sítě krychle.....	64
3.3 Úlohy zaměřující se na jiná tělesa.....	73
4 Pilotní testování	80
4.1 Základní a Mateřská škola Březno	80
4.2 Pracovní list s úlohami k pilotnímu testování	80
4.3 Průběh pilotního testování.....	88
4.4 Vyhodnocení úloh z pilotního testování.....	90
4.5 Stručné shrnutí pilotního testování.....	98
5 Ostré testování	100
5.1 Realizace ostrého testování	100
5.2 Úlohy modulu „Krychle, sítě krychlí a mnoho dalších úloh“	102
5.3 Vyhodnocení ostrého testování	106
Závěr	117

Seznam použitých zdrojů.....	119
Seznam příloh	121

Seznam obrázků

Obrázek 1 - Krychle.....	29
Obrázek 2 - Konvexní (vlevo) a nekonvexní (vpravo) krychlové těleso.....	30
Obrázek 3 - Všechny možné typy sítě krychle	30
Obrázek 4 - Hanojské věže	31
Obrázek 5 - Modely krychlových těles vytištěné na 3D tiskárně pro jednotlivé podúlohy úlohy s názvem "Rozbité krychle"	34
Obrázek 6 - Modely nepřímo shodných krychlových těles vytištěné na 3D tiskárně pro dvě podúlohy s názvem "Rotující tělesa"	34
Obrázek 7 - Model hradu pro úlohu Rytíř Runkel vytištěný na 3D tiskárně.....	34
Obrázek 8 - Detail podúlohy 2 na modelu hradu vytištěném na 3D tiskárně.....	34
Obrázek 9 - Úvodní strana interaktivní webové stránky Mathematikus	36
Obrázek 10 - Ukázka zadání jedné z podúloh úlohy 1 pro téma "Sítě krychle"	39
Obrázek 11 - Ukázka vzorového řešení úlohy 1 pro téma "Sítě krychle"	39
Obrázek 12 - Ukázka zadání jedné z podúloh úlohy pro téma "Rytíř Runkel"	40
Obrázek 13 - Ukázka zadání jedné z podúloh úlohy pro téma "Rozbité krychle"	41
Obrázek 14 - Ukázka správného řešení podúlohy 1 pro téma "Rozbité krychle"	41
Obrázek 15 - Ukázka špatného řešení podúlohy 1 pro téma "Rozbité krychle"	41
Obrázek 16 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 a)	45
Obrázek 17 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 a) - další varianta úlohy	47
Obrázek 18 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 b).....	47
Obrázek 19 - Náměty úloh - krychlová tělesa - zobrazení krychlového tělesa v rovnoběžném promítání	48
Obrázek 20 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 c)	49
Obrázek 21 - Náměty úloh - krychlová tělesa - znázornění správného řešení úlohy 4.1 c).....	50
Obrázek 22 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 c) - další varianty úlohy	53
Obrázek 23 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 d).....	54
Obrázek 24 - Náměty úloh - krychlová tělesa - vyznačení správného řešení úlohy 4.1 d)	54
Obrázek 25 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 e)	57
Obrázek 26 - Náměty úloh - krychlová tělesa - vzorové řešení úlohy 4.1 e)	58

Obrázek 27 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 e) - další doplňující úloha	60
Obrázek 28 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 f).....	61
Obrázek 29 - Náměty úloh - krychlová tělesa - vzorové řešení úlohy 4.1 f).....	61
Obrázek 30 - Náměty úloh - síť krychle - grafické zadání úlohy 4.2 a).....	64
Obrázek 31 - Náměty úloh - síť krychle - vzorové řešení úlohy 4.2 a).....	65
Obrázek 32 - Náměty úloh - síť krychle - grafické zadání úlohy 4.2 b).....	68
Obrázek 33 - Náměty úloh - síť krychle - vzorové řešení úlohy 4.2 b).....	68
Obrázek 34 - Náměty úloh - síť krychle - grafické zadání úlohy 4.2 c).....	70
Obrázek 35 - Náměty úloh - síť krychle - vzorové řešení úlohy 4.2 c).....	71
Obrázek 36 - Náměty úloh - Hanojské věže - grafické zadání úlohy 4.3 a).....	74
Obrázek 37 - Náměty úloh - Hanojské věže - vzorové řešení úlohy 4.3 a).....	74
Obrázek 38 - Náměty úloh - Plánek - grafické zadání úlohy 4.3 b)	77
Obrázek 39 - Pracovní list, první strana - celkový vzhled.....	82
Obrázek 40 - Pracovní list, druhá strana - celkový vzhled	82
Obrázek 41 - Pracovní list, třetí strana - celkový vzhled.....	83
Obrázek 42 - Pracovní list, odvalování hrací kostky - správné řešení.....	84
Obrázek 43 - Pracovní list, síť krychle - zadání	85
Obrázek 44 - Pracovní list, síť krychle - správné řešení.....	85
Obrázek 45 - Pracovní list, celistvá krychle složená ze dvou krychlových těles - správné řešení.....	86
Obrázek 46 - Modely krychlových těles vytištěné na 3D tiskárně pro úlohu celistvá krychle složená ze dvou krychlových těles.....	86
Obrázek 47 - Pracovní list, přímo shodná krychlová tělesa - správné řešení	87
Obrázek 48 - Modely krychlových těles vytištěné na 3D tiskárně pro úlohu přímo shodná krychlová tělesa	87
Obrázek 49 - Žákovské chybné řešení podúlohy 1a).....	92
Obrázek 50 - Manipulace žáka s hrací kostkou při jejím postupném odvalování v podúloze 1a).....	92
Obrázek 51 - Manipulace žáka s pěnovou kostkou, která nahrazovala hrací kostku; zápis řešení.....	93
Obrázek 52 - Jednotlivé kroky ověřování správnosti tvaru sítě krychle.....	94
Obrázek 53 - Pracovní list dvojice č. 7, úloha 3 - nepochopení zadání.....	95
Obrázek 54 - Sestavování celistvé krychle z dílčích krychlových těles	96

Obrázek 55 - Pracovní list dvojice č. 7, úloha 4 - nepochopení zadání.....	97
Obrázek 56 - Vyvození řešení úlohy 4 na základě postaveného modelu	98
Obrázek 57 - Webová stránka Mathematikus - modul „Krychle, sítě krychlí a mnoho dalších úloh“	101
Obrázek 58 - Mathematikus - Sítě krychle - zadání podúlohy 1	103
Obrázek 59 - Mathematikus - Sítě krychle - podúloha 1 - výsledek chybného přiřazení čtverce.....	103
Obrázek 60 - Mathematikus - RytířRunkel - zadání podúlohy 2.....	104
Obrázek 61 - Mathematikus - Odvalující se kostka - zadání podúlohy 1	104
Obrázek 62 - Mathematikus - Rotující tělesa - zadání podúlohy 1	105
Obrázek 63 - Mathematikus - Rotující tělesa - zobrazení zpětné vazby v podobě slovního komentáře.....	106
Obrázek 64 - Mathematikus - Sítě krychle - chybné umístění a jedno z možných správných umístění modrého čtverce k rovinnému obrazci	107
Obrázek 65 - Mathematikus - Rytíř Runkel - názorné ukazování vybraného krychlového tělesa do díry v hradební zdi	108
Obrázek 66 - Mathematikus - Odvalující se kostka - řešení úlohy s pomocí ukazování bodů na stěnách kostky prsty ruky.....	111
Obrázek 67 - Mathematikus - Odvalující se kostka - řešení úlohy s pomocí manipulace rukou.....	112
Obrázek 68 - Mathematikus - Rozbité krychle - řešení úlohy s pomocí manipulace rukou.....	112
Obrázek 69 - Mathematikus - Rotující tělesa - řešení úlohy s pomocí manipulace rukou.....	114

Seznam tabulek

Tabulka 1 - Bodové ohodnocení jednotlivých úloh v pracovním listu.....	90
Tabulka 2 - Bodové hodnocení úloh vypracovaných jednotlivými dvojicemi	91

Úvod

Tato diplomová práce se zabývá možnostmi rozvoje prostorové představivosti žáků 1. stupně základní školy, a to nejen s využitím interaktivní webové platformy s názvem „Mathematikus“.

Vyučující mívají velmi často obavy z výuky prostorové geometrie. Tato práce by měla ukázat, že i při výuce na 1. stupni základní školy lze pomocí vhodně zvolených úloh z tzv. spontánní stereometrie procvičovat a rozvíjet prostorovou představivost žáků poměrně snadným, ale na druhou stranu velice zajímavým a přínosným způsobem. V různých zdrojích, tj. v učebnicích či pracovních sešitech matematiky, knihách zábavné matematiky, ale i na internetu, existuje celá řada příkladů k procvičování a rozvíjení prostorové představivosti. Jedním z možných zdrojů určených k cílenému procvičování a trénování prostorové představivosti žáků 1. stupně je možné považovat právě i speciálně vytvářenou a výše zmíněnou interaktivní webovou stránku Mathematikus.

V následující kapitole se zaměřím především na vysvětlení pojmu prostorová představivost, k čemuž se váže i uvedení základních poznatků o tomto pojmu a zmínění dalších důležitých pojmů s tímto pojmem spojených. Důležitým hlediskem je také zohlednění období vývoje člověka, která jsou nejvhodnější pro prostorovou představivost a její rozvoj v dané etapě života. Nastudované teoretické poznatky aplikuji nejen v praktické, ale i ve výzkumné části mé práce.

V praktické části se budu věnovat sestavení souboru úloh, které by mohly být náměty k doplnění či rozšíření stávajících úloh umístěných ve zmíněné interaktivní webové platformě. Jedním z hlavních cílů této diplomové práce je představení samotné platformy Mathematikus a jejího využití při hodinách geometrie na 1. stupni základní školy.

Ve výzkumné části práce budou pomocí tzv. případové studie popsány různé způsoby řešení a užití metody řešení úloh umístěných na internetové webové platformě Mathematikus žáky 5. ročníku jedné vybrané základní školy ze Středočeského kraje. Vypracování úloh umístěných v platformě Mathematikus žáky 5. ročníku předcházelo seznámení téže skupiny žáků s typově podobnými úlohami v rámci pilotního testování. Ze speciálně navržených úloh jsem vytvořila pracovní list, který měli žáci během pilotního testování za úkol vypracovat, aby věděli, jaké podobné typy úloh je budou

následně při ostrém testování čekat. Tento pracovní list společně s navrženými úlohami představím a také vyhodnotím práci žáků během jeho vypracovávání.

Ve své práci bych chtěla ukázat, že je možné zpestřit výuku geometrie např. pomocí zařazení úloh umístěných v interaktivní webové platformě Mathematikus. Uživatelé mohou totiž díky speciálně naprogramovaným virtuálním animacím využít jiných než běžných metod řešení úloh a mohou tak být motivováni k dalšímu rozvoji své prostorové představivosti. Což je může přivést k poznatkům, že učení může být i zábavné a že není potřeba se tématu prostorové geometrie obávat.

1 Prostorová představivost

Nacházíme se v trojrozměrném světě, k lepší orientaci v něm využíváme mimo jiné také prostorovou představivost. Každý člověk používá prostorovou představivost během svého života v rámci různých situací, při všech možných příležitostech. Prostorovou představivost člověk užívá, aniž by si tohoto faktu byl vědom.

Prostorová představivost je velice důležitá pro každodenní život jakéhokoliv člověka. Někteří lidé však potřebují mít tuto schopnost na vyšší úrovni jako např. konstruktéři, stavaři, architekti, ale také i zdravotníci, výtvarníci, letci či potápěči. Konstruktéři využívají prostorovou představivost např. při vytváření si představ prostorových situací, které znázorňují, jakým způsobem mohou být prostorové objekty vytvořeny, jak mohou být tyto objekty vzájemně propojeny, jak mohou závisle, ale i nezávisle na sobě fungovat, ale i jak mohou být zakresleny ve vhodném softwaru, který zpravidla umožňuje zobrazení trojrozměrných objektů na dvourozměrné nákresy atd. Stavaři potřebují prostorovou představivost k přesnému zobrazení rozměrů prostorových objektů, k zakreslení stavěných trojrozměrných objektů do znázorněného terénu a především k okótování stavěných trojrozměrných objektů na stavebních plánech apod. Ani architekti se neobejdou bez vyšší úrovně prostorové představivosti. S výhodou prostorovou představivost užívají např. k vizualizaci navrhovaných objektů, k zakreslení objektů na určené místo v plánu atd. Dokonce i někteří lékaři – specialisté využívají svou prostorovou představivost během výkonu své práce. Zde lze zmínit např. rentgenology, lékaře vyhodnocující screeningy, lékaře – operatéry provádějící operace např. pomoci přístrojů. Výtvarníci mohou užít svou prostorovou představivost např. k vyvážení proporcí (poměrů) znázorňovaných objektů na plátno, k přenesení reálné situace (např. části krajiny, lidské postavy, zátiší,...) na plátno, tedy na dvourozměrnou rovinu. Prostorová představivost je mimo jiné také důležitou schopností sochařů, kteří potřebují dodržovat pravo- a levostrannou orientaci modelovaných trojrozměrných objektů. Je např. zapotřebí, aby při sochání lidské podstavy správně umístili jednotlivé části lidského těla. Dalšími profesemi, při jejichž vykonávání je důležitá vyšší úroveň prostorové představivosti, jsou vojáci, letci či potápěči. Vojáci i letci využívají svou prostorovou představivost k orientaci v terénu, při čtení map, odhadu vzdáleností aj. Potápěči potřebují velmi vysokou úroveň prostorové představivosti, aby např. našli cestu zpět na hladinu či na loď, pokud plavou mezi útesy nebo v podmořských jeskyních atd. Objevili bychom velké množství dalších

povolání, při jejichž vykonávání je prostorová představivost jednou z nutných schopností. (Hejzlarová, 2017, str. 15)

Lze konstatovat, že žáci v útlém věku mnohdy ještě nemají jasnou vizi svého budoucího povolání, a proto je příhodné jejich prostorovou představivost trénovat. Žádný z nich totiž netuší, jak moc ji bude při výkonu svého budoucího povolání potřebovat.

Já se procvičování prostorové představivosti budu věnovat v této diplomové práci, a to především z hlediska matematického, konkrétně však z oblasti geometrie. Dříve, než popíši některé možnosti procvičování prostorové představivosti s pomocí úloh tzv. spontánní stereometrie, pojednám o prostorové představivosti z psychologického hlediska. Zmíním také pojmy, které jsou s prostorovou představivostí velmi úzce spjaté.

1.1 Související pojmy

Na začátku se zaměřím na vysvětlení několika důležitých pojmů, které mají úzkou souvislost s termínem prostorová představivost. Pochopení všech uvedených pojmů povede k lepšímu a hlubšímu porozumění popisované problematiky a také rozšíří znalosti čitatele v dané oblasti.

1.1.1 Schopnost

Schopností je rozuměna ojedinělá kapacita jedince pro vykonání určité činnosti v následujících chvílích. Významnou roli hrají vrozené předpoklady člověka, které je možné rozvíjet v souvislosti zařazenosti jedince do sociální skupiny, tj. záleží na míře hodnotné výchovy a vzdělávání, které mu bude poskytnuto. Mezi schopnosti řadíme schopnosti zrakové, sluchové, intelektové a pohybové činnosti, přičemž konkrétním příkladem sluchových schopností může být hudební sluch, zrakových schopností pak rozlišování barev a intelektových schopností mj. prostorová představivost. (Průcha, 2013, str. 262)

1.1.2 Dovednost

Pojem dovednost se užívá v celém oboru pedagogiky, kde pro něj ale není zcela jednoznačné vysvětlení. Tento pojem můžeme vysvětlit např. jako způsobnost jednotlivce k vykonávání dané činnosti, kterou může být řešení úkolových či různých problémových situací, jež jsme schopni pozorovat. Dovednost je do jisté míry závislá

na vrozených předpokladech, ovšem získání nových poznatků je možné pomocí záměrného učení, ale také samovolně během hraní her. (Průcha, 2013, str. 59)

Schopnosti a dovednosti jsou vzájemně velmi úzce spojeny, mnohdy může být náročné je od sebe jednoznačně rozlišit. V mnoha případech se dovednost zahrnuje také jako součást pojmu schopnost. Schopnost je považována za obecnější předpoklad k určité činnosti, dovednost je více specificky definována. (Čáp, 1993, str. 87)

1.1.3 Představy

Představy značí obraz něčeho, co momentálně nepůsobí na receptory daného jedince. Dokážeme si představit či v představách vybavit již známý pohled, který jsme vnímali zrakem, ale také tón hlasu člověka, se kterým jsme se již někdy setkali, či hudební skladbu, kterou jsme v minulosti slyšeli. (Čáp, 1993, str. 43)

Dále můžeme nahlížet na představu jako na prostředek poznání, jenž je závislý na kognitivních funkcích. Vytváříme si obrazy předmětů či situací, které momentálně nejsme schopni vnímat. Součástí je smyslový charakter, při němž jsme schopni si vybavit rozmanitou škálu barev, různé rozměry a tvary. Při tvorbě představ nejsou přítomny pouze smysly, ale také činnosti. Nejdůležitější součástí činností je motorika. (Molnár, 2009, str. 23)

Představy mají velice úzkou souvislost s mnoha senzomotorickými procesy, tj. s percepcí neboli vnímáním, s pamětí, myšlením a emocemi. Ve spojení s percepcí je úzká souvislost s představami z toho důvodu, že představy vznikají na základě vjemů a jejich zpracování. Mozek si zapamatuje odehrané vnitřní psychické činnosti jedince a ty později pomocí kódování využije v příhodný okamžik. Percepce je primárním pramenem pro rozvoj představivosti. Dalším zdrojem rozvoje představivosti je paměť, pomocí níž dochází k zpřítomnění poznatků získaných v dřívějších dobách. Může se stát, že představy zaměříme do budoucnosti, v takovémto případě představ nazýváme anticipační. V dřívějších časech se představy velmi často zaměňovaly za myšlení, až pomocí výzkumu uskutečněného na wüzburgské škole byla objevena hranice mezi hlasitým myšlením a řešením problémů. V rámci řešení problémů se jedná o duševní jevy, které se odlišují od vjemů a představ. Koncepci myšlení můžeme rozdělit na dvě části, tj. na imaginativní aktivity a zvláštní usuzování. Obě tyto složky využíváme během vybavování si vytvořených představ. Posledním

procesem spojovaným s představami jsou emoce. Přitom emoce můžeme považovat také za proces prožívání. Naše představy jsou spojeny s emocionální reakcí, jsou způsobeny vnitřními či vnějšími podněty vzniklými či vyvolanými v určité situaci, v důsledku toho mohou ukázat intenzivní změny či navodit emocionální reakce. (Půlpán, Kuřina, Kebza, 1992, str. 25-27)

1.1.4 Fantazie

Fantazií rozumíme rozvinutou představivost či obrazotvornost, silně uvolněnou od všech zkušeností. (Čáp, 1993)

1.2 Základní teoretické poznatky o prostorové představivosti

Každý člověk si pod pojmem prostorová představivost může vybavit něco jiného. Pro jednoho prostorová představivost znamená vytvoření si představ prostorových objektů, pro druhého pak např. přenesení si v myšlenkách zobrazenou cestu na mapě do reálné situace, pro dalšího vyvolání si představ krajiny a pohybu po cestách v ní atd. Lze shrnout, že pojem prostorová představivost je do výkladu velice široký, a tak není možné použít pouze jednu jeho definici a tvrdit, že právě ona je ta správná. Problematikou prostorové představivosti se ve svých publikacích a odborných člancích zabývalo a i nadále zabývá mnoho autorů, každý z nich vytvořil jinou formulaci tohoto pojmu.

Základní principy prostorové představivosti uváděné různými autory shrnul Josef Molnár (2009, str. 31) ve své odborné literatuře. Někteří autoři se vyjadřují o prostorové představivosti jako o tzv. geometrické představivosti, což v tento moment bereme jako synonymum pojmu prostorová představivost, a můžeme tak dále využívat oba názvy. Na druhou stranu se mnoho odborných literatur zabývá dělením představivosti na tři typy, tj. na matematickou, geometrickou a prostorovou představivost. (Perný, 2004, str. 38-43)

Velice stručně popisují jádro věci Perenčaj a Repáš (1985), kteří hovoří o prostorové představivosti jako o pozorování prostoru, který vidí každý, kdo má nepoškozený zrakový orgán. Uvádějí ale také ovšem, že není dostačující prostor pouze vidět, ale že je důležité ho také chápat.

Gardner (1999) popisuje prostorovou představivost následovně: „Jejím jádrem jsou schopnosti, které zajišťují přesné vnímání vizuálního světa, umožňují

transformovat a modifikovat původní vjemy a vytvářejí z vlastní zkušenosti myšlenkové představy, i když už žádné vnější podněty nepůsobí.“

Další autor, jménem Dušek (1970), se o prostorové představivosti vyjadřuje tak, že pokud je vyšlechtěna v jednom odvětví, není pokaždé zaručen žádoucí stupeň dané schopnosti v jiném odvětví. Z tohoto důvodu nemluví Dušek o prostorové představivosti, nýbrž o představivosti geometrické, tzn., že se věnuje vývoji představivosti týkající se geometrického konceptu. Je pro něj důležité, aby si dokázal jedinec daný tvar představit a aby ho uměl podrobně rozebrat, tj. udělat analýzu daného útvaru, připojit a transformovat.

Zmiňovanému tématu se také věnuje autorka Šarounová (1982), která chápe prostorovou představivost jako souhrn jednotlivých schopností, které se týkají představ jedince o prostoru, o tvarech a vztazích mezi tělesy, předměty a lidmi, nebo o vzájemných prostorových poměrech individuálních částí lidského těla. I ona užívá pojem geometrická představivost, a to v případech, kdy se zajímá o geometrické objekty, přesněji o možnost rozpoznat geometrické útvary v rovině a primární tělesa v prostoru, představit si poměry mezi rovinnými útvary a také umístění prostorových těles a rovin navzájem.

Říčan (1972) rozčlenil prostorovou představivost do tří složek. Jedná se o složku prostorové orientace, kde je potřeba zvolit polohy jedince ve zvoleném okolí. Tuto schopnost potřebují mj. letec či skokan. Další složkou je vizualizace, v níž máme možnost si uvědomit vzájemnost vztahů mezi předměty vyskytujícími se mimo naše tělo, když se dostanou do určitých poloh, což je využitelné v geometrii, která se zabývá zobrazováním, tj. v deskriptivní geometrii. Poslední částí je kinestetická představivost, kterou využije například technik pro uvedení ozubených kol do chodu.

Na závěr nesmí chybět definice Molnára (2009, str. 33), který prostorovou představivost popisuje jako „Soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru.“ Některé části této definice jsou dále detailněji vysvětleny. Dodatkem je, že místo, čímž je reálný prostor okolo nás, zcela chápeme a vnímáme ho. Tento prostor je třírozměrný geometrický model, který můžeme také nazvat jako euklidovský syntetický model. Naše představy jsou opravdovým odrazem skutečných předmětů. Souvisejícími vztahy můžeme označit objemnou třídu relací, transformací a operací s geometrickými útvary. Obecně

porozumíme prostorové představivosti jako souboru schopností, kdy se u každého jedince vyskytují tyto schopnosti v různé míře či intenzitě.

Především z toho důvodu, že se v této práci zabývám webovou platformou Mathematikus a v ní umístěnými úlohami, při jejichž řešení lze s výhodou využívat představ o tvarech, jejich vlastnostech a také vzájemných vztazích, ztotožňuji se nejvíce s uvedenou definicí Molnára. Ta zahrnuje širokou škálu schopností a vlastností. Molnárovi také záleží na umu manipulovat s danými útvary. Popisuje potřebnost nikoliv jen schopností představ geometrických útvarů a jejich vlastností, ale i důležitost představ o vztazích jednotlivých útvarů navzájem. Žáci by jistě měli vědět a znát spojitost mezi jednotlivými útvary.

I ostatní definice obsahují spousty zajímavých poznatků, jen mi nepříjdou zcela úplné a dle mého názoru nevyjadřují tak široký obsah termínu prostorová představivost.

1.3 Rozvoj prostorové představivosti u žáků 1. stupně

Z výše uvedených poznatků vyplývá, že prostorová představivost je důležitou schopností každého člověka a že je zapotřebí ji rozvíjet už od nejútlejšího věku, a to až do dospělosti.

Již některé tříleté děti dokážou poznat několik základních prostorových těles jako kostku (krychli), kvádr, kužel, válec a kouli, protože se s předměty jejich tvarů setkávají všude okolo sebe. Mnohdy si s modely uvedených základních těles denně hrají, neboť bývají součástí dřevěných, plastových, magnetických či pěnových setů stavebnic. Následně pak při zahájení povinné školní docházky umí velká většina dětí výše uvedená základní tělesa pojmenovat.

Dětem v předškolním věku, ale nejenom jim, pomáhají k rozvoji jejich prostorové představivosti především speciálně vytvořené didaktické hry. V současné době je jich na trhu celá řada. Jsou věkově, a tím pádem i náročnostně odstupňované. Mohli bychom sem zařadit například různé typy prostorových hlavolamů jako soma kostku, Rubikovu kostku, ale i hry Zámecké schody, Chytré autíčko, Barevný kód, Tučňáci na ledu, IQ puzzle a mnohé další. Dále k rozvoji prostorové představivosti dochází například i v běžném aktivním životě a při hraní různých her v trojrozměrném prostoru, tj. v přírodě, ale i např. ve speciálně vybudovaných venkovních či vnitřních prostorových bludištích. Našlo by se jistě mnoho a mnoho dalších příkladů. Některé

vhodné hry se mohou zahrnout i do výuky na základní škole, jejich zařazením pak dojde nejen k oživení hodin matematiky, ale i k cílenému rozvoji různých schopností dětí, mimo jiné i k trénování jejich prostorové představivosti.

Žáci vstupují do první třídy s určitým stupněm prostorové představivosti. Následně je jen na dalším trénování, procvičování a učení, aby si žáci úroveň své prostorové představivosti během svého vývoje rozvíjeli a zdokonalovali. V důsledku takového záměrného trénování u nich dochází také mimo jiné k rozvoji rozumových schopností, kterými jsou získávání dovedností a zkušeností, správná motivace apod. Musíme si uvědomit, že dalším důležitým faktorem pro vhodný rozvoj prostorové představivosti je také základ vrozených předpokladů, které jsou závislé na genetice daného člověka. Hrají zde roli i vnitřní faktory, mezi něž můžeme řadit pohlaví a věk člověka a také vlastnosti vnitřních psychických procesů jako např. aktuální psychický stav člověka, myšlení a vnímání. (Hejzlarová, 2017)

Žáci 1. stupně jsou díky znalostem z dřívějších let, např. o již zmiňovaných základních tělesech, následně schopni poměrně rychle a jednoduše objevit vlastnosti těchto prostorových objektů. Z pokusu od Šarounové, který zmiňuje ve své literatuře Molnár, je zřejmé, že by žáci na prvním stupni základních škol měli tělesa začít znázorňovat náčrtkem před samotným rýsováním. Žáci si samovolně vytvářejí představy o totožných a analogických útvarech v rovině i prostoru. Tato činnost by se dala přidružit k faktu, v němž je zjevné, že děti mají geometrickou představivost při vstupu do školy několikrát obsáhlejší, než je stanoveno v učebních osnovách matematiky. (Molnár, 2009, str. 40)

Samotný rozvoj prostorové představivosti u žáků prvního stupně ZŠ by měl být spojený s pozitivním zážitkem. Při výuce můžeme zapojit činnosti a hry, u kterých využijeme modely různých základních těles. Žákům tak poskytneme předměty, které si mohou osahat, čímž při učení využijí více smyslů. Nerozvíjíme tak pouze jejich znalosti, prostorovou představivost, ale také manipulativní činnosti či dokonce komunikativní dovednosti při argumentování o vlastnostech základních těles. Je také možné modely jednotlivých základních těles společně s žáky vyrobit, např. z papíru, z modelíny, anebo společně s nimi vytvořit tzv. hranové modely těles za pomoci speciálně vyrobených stavebnic či modelíny, případně přírodních materiálů jako např. kaštanů a špejlí, a to v rámci pracovních činností či výtvarné výchovy, čímž do výuky zapojíme i mezipředmětové vztahy. Žákům by při rozvíjení jejich prostorové představivosti mohly pomoci i různé didaktické a edukativní hry,

jak již bylo zmíněno výše, které je však vhodné obměňovat, aby je hraní s nimi neomrzelo. Do vyučovacích hodin můžeme zařadit různé prostorové hlavolamy, stavebnice s krychlemi, ale i s tělesy jiných tvarů, soma kostky, hrací kostky, magnetické stavebnice různých typů (s dílky ve tvarech rovinných útvarů, ale i s dílky ve tvaru shodných krychlí aj.), průmyslově vyrobené stolní hry apod.

Další a podrobnější informace uvedu v podkapitole 1.4 s názvem Způsoby rozvoje prostorové představivosti během vývoje člověka.

1.3.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

V Rámcovém vzdělávacím programu (RVP) pro základní vzdělávání (MŠMT ČR, 2021) je uvedeno několik vzdělávacích oblastí. Jedna ze vzdělávacích oblastí se nazývá Matematika a její aplikace.

„Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě, a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost. Pro tuto svoji nezastupitelnou roli prolíná celým základním vzděláváním a vytváří předpoklady pro další úspěšné studium.“ (MŠMT ČR, 2021, str. 30)

Vzdělávací obsah oblasti Matematika a její aplikace je rozdělen na čtyři tematické okruhy. Pro každý stupeň základního vzdělávání se tyto okruhy nazývají trochu jinak.

Pro 1. stupeň základního vzdělávání se v oblasti zvané Matematika a její aplikace rozlišují tyto čtyři následující okruhy:

- číslo a početní operace,
- závislosti, vztahy a práce s daty,
- geometrie v rovině a prostoru (tento okruh je nejdůležitějším okruhem pro tuto práci),
- nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Všechny čtyři výše uvedené okruhy vedou k formování klíčových kompetencí, jako je využití matematických vědomostí a obratností v reálném životě – porovnávání velikostí, vzdáleností, orientace v prostoru. Žáci rozvíjí kombinatorické a logické

myšlení, kritické usuzování a argumentaci, následně i abstraktní a exaktní myšlení, kdy používají základní pojmy a vztahy. Velmi cenné je převedení problematiky do praktického života, kdy podporují rozvoj matematickým modelováním. Důležité je poznání, při němž zjišťují složitost reality, neboť se setkávají s odlišnými okolnostmi, které využijí pro různé způsoby řešení.

„V tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.“ (MŠMT ČR, 2021, str. 30)

V geometrii je pro rozvoj prostorové představivosti velice přínosná část zaměřená na orientaci v prostoru, kdy s žáky určujeme, kde se daný objekt v závislosti na pozici jiného daného objektu vyskytuje (před, za, v, nahoře, nad, vedle apod.). Pro vytvoření názorné představy prostorové situace můžeme s výhodou využít různé, již výše zmiňované pomůcky (stavebnice, didaktické a edukativní hry, skládačky aj.), ale i obrázky či náčrtky. Ale např. i skládání různých objektů z papíru pomocí origami (např. krychle, pravidelného čtyřstěnu, ale i jiných objektů z běžného života) může u žáků podněcovat nejen rozvoj jejich prostorové představivosti, ale též přispívat k rozšiřování jejich matematických, přesněji geometrických znalostí, jako jsou např. střed úsečky, středově souměrné útvary, osa souměrnosti, osově souměrné útvary, osová souměrnost, shodné nebo podobné rovinné obrazce či prostorové objekty, vrchol, hrana a stěna prostorového tělesa apod. Různé činnosti lze při výuce kombinovat, abychom u žáků rozvíjeli, co nejvíce jejich schopností a dovedností.

Kromě výše uvedeného se „žáci učí využívat prostředky výpočetní techniky (především kalkulátory, vhodný počítačový software, určité typy výukových programů) a používat některé další pomůcky, což umožňuje přístup k matematice i žákům, kteří mají nedostatky v numerickém počítání a v rýsovacích technikách. Zdokonalují se rovněž v samostatné a kritické práci se zdroji informací.“ (MŠMT ČR, 2021, str. 30)

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání obsahuje v oblasti Matematika a její aplikace očekávané konkrétní výstupy, které by měl žák po absolvování prvního stupně zvládnout.

Konkrétními očekávanými výstupy pro okruh Geometrie v rovině a prostoru po absolvování 1. stupně základního vzdělávání jsou:

- žák rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary (lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník) a jednoduchá tělesa (kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec); nachází v realitě jejich reprezentaci; základní geometrické tvary umí graficky znázornit;
- žák narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce;
- žák sestrojí rovnoběžky a kolmice;
- žák sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran;
- žák porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky;
- žák určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu;
- žák rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině; rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru.

1.4 Způsoby rozvoje prostorové představivosti během vývoje člověka

Již od narození se člověk pohybuje v prostoru, ve kterém potřebuje získat určitou prostorovou orientaci. Zpočátku si dítě trojrozměrnost prostoru, ve kterém se pohybuje, však vůbec neuvědomuje. Hejný a kol. (1990) uvádí, že prostorová představivost není vrozenou schopností, že ji musíme rozvíjet a snažit se ji posunout na vyšší úroveň pomocí různých aktivit. Naopak Molnár (2009, str. 67) poznamenává výzkum Peasových o činnosti mozku. Ti odhalili „naprogramování“ mysli již šest nebo osm týdnů po početí.

Jedno z prvotních využití prostorové představivosti dětmi se uskutečňuje již během jejich hraní v útlém věku, např. při stavění staveb různých tvarů z dílků stavebnic. Dílky stavebnic mohou být například ve tvarech základních těles. V těchto momentech si vytváří intuitivní představy prostorových objektů. Díky těmto procesům dítě samo zjistí, že při stavění komínu např. ze shodných kostek je potřeba stavět stěnu

jedné kostky na stěnu druhé kostky, aby byla vzniklá stavba stabilní a aby tedy nespadla. Tím si dítě zajišťuje zvnitřnění a upevnění důležitých pojmů (stěna, hrana, vrchol) pro následující manipulaci s kostkami. Uvedené pojmy neumí prozatím pojmenovat, ale důležité je, že si jejich existenci uvědomuje. Děti tak svou hrou se stavebnicí kostek různých tvarů získávají své prvotní zkušenosti s různými prostorovými tělesy, jejich částmi a tvary.

Vhodné období pro rozvoj prostorové představivosti uvádí Hejzlarová (2017) ve své práci, kde označuje za nejvhodnější dvě věkové etapy, v jejichž průběhu můžeme předpokládat největší rozkvět prostorové představivosti. Prvotně se s příhodnou etapou ve vývoji jedince setkáváme v předškolním věku, přesněji kolem pěti let věku dítěte. V tomto období dochází k růstu úrovně prostorové představivosti zejména na základě manipulování s reálnými předměty a též díky hře. V uvedeném období bychom měli dětem nabízet co nejvíce předmětů různých tvarů a odlišných materiálů. V tomto období je také důležité u dětí cíleně podporovat rozvoj představivosti, tvořivosti a fantazie. K tomu můžeme využít objekty z běžného života, které budeme pojmenovávat, přiřazovat jim tvary základních těles a určovat jejich vlastnosti, charakteristické prvky. Následně pobídeme děti k manipulaci s takovýmito předměty. Můžeme nechat děti z nich stavět stavby. V případě sestaveného krychlového tělesa lze zadat dětem počítat krychle, případně jejich čtvercové stěny, které vidí z různých stran, což vede mimo jiné také k rozvíjení dětské fantazie. Dítě tím získá zkušenosti, které bude schopné využít při řešení obtížnějších úloh. V mateřské školce se doporučuje přípravná povaha činností v podobě manipulací s předměty, hry a řádnou motivací k rozvoji tvořivých dětí. (Prášková, 2008)

Velice přínosnými mohou být pro děti i lego stavebnice, které nabízejí spoustu alternativ činností. Jejich velkou výhodou je, že je výrobci produkují s odlišnými velikostmi dílků a s různou náročností sestavovaných objektů. V důsledku toho je možné pořizovat dětem takovou lego stavebnici, jež odpovídá jejich věku a schopnostem. Dalšími možnými a vhodnými manipulativními pomůckami jsou prostorové stavebnice obsahující všemožné tvary těles a prostorových objektů, ze kterých děti rády staví různá velká města a opevnění. V současné době existuje široká škála stavebnic různých typů, ze kterých děti rády staví různé prostorové objekty. Je možné dětem pořídit dětské 3D puzzle. Při pobytu venku můžeme děti v lese či na zahradě zaujmout stavbami ze dřeva a listí. Poznají tak spoustu dalších možných materiálů, což povede mimo jiné k rozvoji jejich obrazotvornosti.

Druhé období, vhodné k rozvoji prostorové představivosti člověka se dle Hajzlerové (2017) objevuje během mladšího školního věku dětí, tj. s nástupem povinné školní docházky. V tuto dobu se u dětí formuje schopnost vyplňovat, ohraničovat a dělit prostor, formuje se také přesnější vnímání pohybu v prostoru.

Hejný a kol. (1990) považuje pojem geometrická tělesa v prostoru jako základní, uvádí jej jako primární pojem pro výuku stereometrie, tj. prostorové geometrie. I on apeluje na prvotní seznámení s prostorovou představivostí pomocí manipulativních činností, které budou vést k myšlenkovým operacím. Využití kostky nenahradí žádné jiné možné těleso, tyto vizuální zkušenosti zná dle jeho názoru v mladším školním věku téměř již každý. Ohmatání tělesa a hraní si s ním povede k následnému zdárnému složení sítě v model tělesa.

Perný (2004) uvádí jako velmi přínosné faktory při řešení úloh procvičujících prostorovou představivost zapojení pohybu, dalších smyslů a také možnost vyjádření myšlenek a představ hlasem. Využití uvedených faktorů vede k vyšší úspěšnosti žáků při řešení úloh cíleně rozvíjejících prostorovou představivost. Jako jednu z možností rozvoje prostorové představivosti je vhodné a nejspíše i nutné zařazovat úlohy tohoto typu již na 1. stupni základní školy. I tento autor poukazuje na výhodnost rozvoje prostorové představivosti prostřednictvím manipulace s předměty, čínorodým řešením úloh z této oblasti a využitím didaktických her.

Několik autorů se ztotožňuje s názorem, že problematice prostorové představivosti ve školách není poskytován dostatečný prostor a pozornost. (Hejzlarová, 2017)

Nabízí se zde, že žáky můžeme vést k trénování prostorové představivosti nejen v hodinách matematiky, ale i při výuce dalších vyučovacích předmětů jako pracovní činnosti, výtvarná výchova, člověk a jeho svět, tělesná výchova i informatika. Při výuce informatiky mohou sami žáci rozvíjet svou prostorovou představivost prostřednictvím vytváření jednoduchých algoritmů např. ve vizuálním programovacím jazyce zvaném Scratch [18]. Tento programovací jazyk umožňuje vytvářet algoritmy či jednoduché programy manipulací s grafickými programovými elementy, tzv. bloky. Už i žáci 1. stupně ZŠ jsou schopni naprogramovat v programu Scratch pomocí jednoduchých příkazů a z nich vytvořených algoritmů vykreslení např. jednoduchého obrázku. Při sestavování algoritmu si musí ve svých představách vybavit, jakými směry se má zvolená postava při vykreslování obrázku po nákrese vydat.

I když v poslední době je snahou většiny dospělých, aby žáci trávili méně času na elektronických zařízeních, mohou se objevit i výjimky. Pokud žáci využívají elektronická zařízení účelně, tj. používají různé aplikace, edukativní hry, speciálně vytvořené programy k rozvoji svých schopností a znalostí, mohou jim naopak učitelé či rodiče vhodné aplikace, edukativní hry a speciálně vytvořené programy doporučit.

Jednou z počítačových her, která může žákům jakéhokoliv školního věku, ale i dospělým pomoci s rozvojem prostorové představivosti, je herně založená výuková platforma zvaná Minecraft. Jedná se o budovatelskou, strategickou hru s krychlovitou grafikou a otevřeným světem, ve kterém uživatelé mohou dělat doslova vše, co se jim zachce. Jedním z pěti možných herních režimů, které motivují uživatele ke kreativité, tvořivosti a soutěživosti, je možnost postavení si svého vlastního světa.

Existence, skládání a řešení různých hlavolamů také dává mnoho možností k trénování prostorové představivosti. Hlavolamy mohou mít formu virtuálních aplikací anebo mohou být průmyslově vyráběné. Řešitelé při skládání hlavolamů neprocvičují pouze svou prostorovou představivost, ale také paměť, strategické myšlení a uvažování. Řešení hlavolamů vede mnohdy ale také k trénování soustředěnosti, trpělivosti a vytrvalosti.

V hodinách geometrie, a to na jakémkoliv stupni škol se nabízí procvičování prostorové představivosti pomocí řešení příkladů z tzv. spontánní stereometrie. Mezi jednotlivá témata spadající do spontánní stereometrie řadíme geometrická tělesa, skládání a rozkládání těles, sítě těles a manipulace s nimi, pohyby těles (otáčení těles, zakreslování kolmých pohledů na tělesa do plánek, odvalování těles, protahování těles daným otvorem), geometrii povrchu těles (pohyb po povrchu těles a hledání různých spojnic na povrchu těles), kombinatorická geometrie těles a prostorová bludiště. Úlohy ze spontánní stereometrie je třeba zařazovat při výuce s přiměřenou náročností, která odpovídá věku, znalostem a schopnostem žáků.

Během volných chvil můžeme příležitostně zařadit do výuky také klasické deskové hry, např. u šachů žáci musí přemýšlet a trochu předvídat, jaké tahy mohou udělat.

S trénováním a zdokonalováním prostorové představivosti je spjata mnoho dalších činností, jedná se např. o jemnou motoriku, vlastní aktivitu, dále pak jsou s rozvojem prostorové představivosti spojeny fantazie a strategické uvažování.

Na závěr této podkapitoly se zaměřím na rozlišení úrovní prostorové představivosti u mužů a žen. Pomocí výzkumu dle Peasových (Molnár, 2019, str. 67)

bylo zjištěno, že mozky mužů a žen fungují na jiných principech. Vývoj pravé hemisféry je u chlapců rychlejší než u dívek. Díky tomu chlapci více vynikají při skládání puzzle či při stavbě kostek. Manželé Peasovi popisují funkci přední části pravé hemisféry jako centra prostorového vnímání mužů. Je to vysvětlováno historickými fakty, kdy na počátku byli muži v roli lovců a potřebovali k této záslužné činnosti prostorovou představivost pro lepší orientaci v terénu. Ženy tuto schopnost nepotřebovaly, a proto mají tuto část mozku méně rozvinutou. Díky této skutečnosti si některé ženy nevolí zájmy a povolání, při jejichž vykonávání je prostorová představivost potřeba. Muži naopak excelují v těch aktivitách a povoláních, při nichž je zapotřebí vyšší úroveň prostorové představivosti, mohou jimi být např. letectví, architektura či různé sporty (golf, míčové hry). I když se ženy a muži mohou lišit v kognitivních schopnostech, v souhrnné inteligenci tomu tak není.

V této podkapitole jsem vyjmenovala a popsala různé možnosti a způsoby rozvoje prostorové představivosti, a to nejen u školáků. Je velmi důležité, abychom prostorovou představivost rozvíjeli mnoha různými aktivitami, kterými dokážeme žáky zaujmout. I oni sami pak zjistí důležitost geometrie a prostorové představivosti pro potřeby své existence a správného fungování v reálném světě. V mnoha případech si pak žáci sami např. naprogramují nějakou hru či kreslí návrhy svých pevností (např. ve hře Minecraft), pokojů či vysněných domů. To značí cestu rozvoje jejich prostorové představivosti správným směrem.

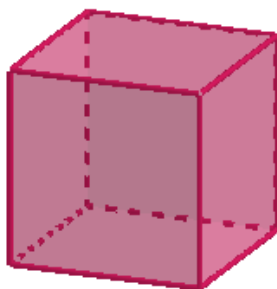
Každého žáka musíme přijímat jako jedince, který vyniká v jiném oboru. Avšak ani tak nesmíme zanevřít na správné užití metod a motivace během výuky.

1.5 Geometrické objekty

Ve výše uvedených podkapitolách byly kromě popsanych pojmů z psychologie zmíněny také některé pojmy z geometrie. V této podkapitole stručně vysvětlím některé geometrické pojmy, a to především ty, o kterých je pojednáno i v dalších kapitolách a podkapitolách této práce. Jedná se o vybraná geometrická tělesa, jejich sítě a kolmé pohledy na ně.

1.5.1 Krychle

Krychle (viz obr. 1) neboli kostka (tento název užívám v některých zadáních úloh určených pro žáky 1. stupně ZŠ) je pravidelné prostorové těleso, které má šest stěn. Všechny stěny jsou tvořeny shodnými čtverci.



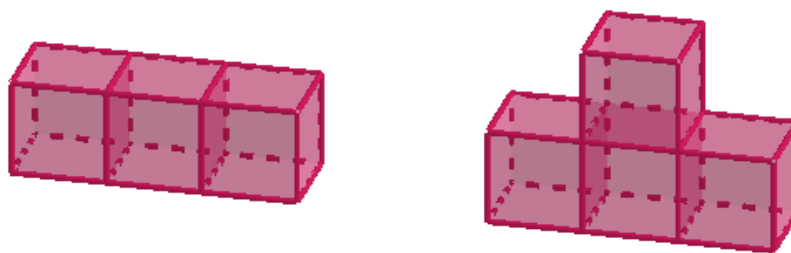
Obrázek 1 - Krychle

Krychle patří mezi pravidelné konvexní mnohostěny, které bývají označovány souhrnným názvem Platónská tělesa. Základními společnými charakteristickými vlastnostmi pravidelných konvexních mnohostěnů jsou následující dvě vlastnosti:

- z každého vrcholu pravidelného konvexního mnohostěnu vychází stejný počet hran,
- všechny stěny pravidelného konvexního mnohostěnu tvoří shodné pravidelné mnohoúhelníky.

1.5.2 Krychlové těleso

Krychlové těleso je prostorový objekt, který vznikne sjednocením shodných dílčích krychlí, přitom sousední dílčí (někdy jsou také nazývány jednotkové dílčí krychle, a to v případě, že délky jejich hran jsou rovny jednotce určité míry) krychle mají společnou styčnou stěnu. Minimální počet dílčích krychlí v krychlovém tělese jsou dvě, maximální počet dílčích krychlí v krychlovém tělese není nijak omezen. Krychlová tělesa mohou být jak konvexními, tak i nekonvexními prostorovými objekty (viz obr. 2)

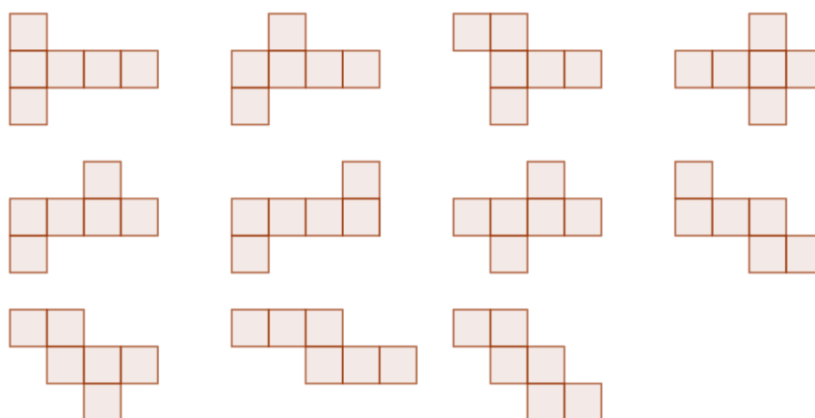


Obrázek 2 - Konvexní (vlevo) a nekonvexní (vpravo) krychlové těleso

Jejich konvexnost či nekonvexnost závisí na uspořádání dílčích krychlí v příslušném krychlovém tělese. Za krychlová tělesa nepovažujeme ty prostorové objekty, kdy se dílčí krychle dotýkají vzájemně buď pouze svými hranami, či vrcholy, aniž by se nějakou svou stěnou dotýkaly stěny jiné dílčí krychle téhož prostorového objektu.

1.5.3 Sítě krychle

Sítě krychle nazýváme rozložený povrch krychle do dvourozměrné roviny. Sít' krychle je složena ze šesti shodných, vzájemně se dotýkajících čtverců. Jde o přesné rozmístění čtverců, které při zpětném složení do trojrozměrného prostoru obalí všech 6 stěn krychle o stejné délce hrany, jako jsou délky stran shodných čtverců. Při zpětném složení nesmí dojít k žádnému překrytí jednotlivých čtverců sítě krychle. Důležité je, aby byla krychle obalena svou sítí celá, tj. na všech svých stěnách. Pokud zakreslíme sít' krychle na papír a následně ji vystříhneme, vznikne model sítě krychle. Existuje 11 různých sítí krychle, ty jsou znázorněny na obrázku 3.



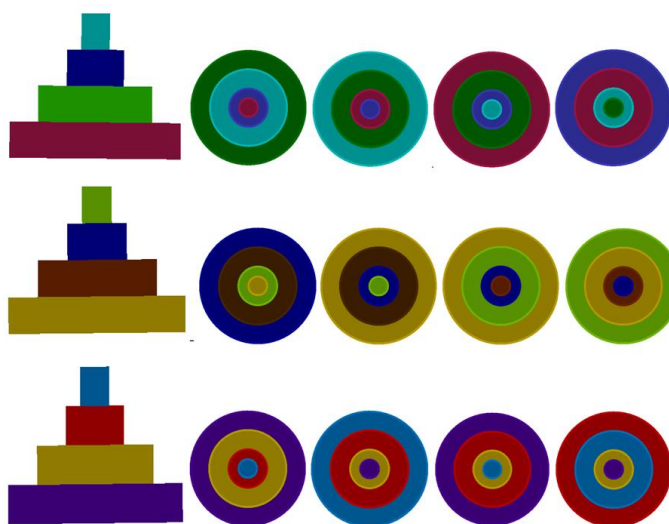
Obrázek 3 - Všechny možné typy sítě krychle

1.5.4 Kolmé pohledy

Kolmé, neboli pravoúhlé pohledy slouží k zakreslení trojrozměrného objektu na dvourozměrnou rovinu pomocí pravoúhlého rovnoběžného promítání. Patří sem nárys, ten představuje kolmý pohled na zobrazovaný objekt z přední strany, dále pak půdorys, jenž zobrazuje kolmý pohled na zobrazovaný objekt shora, a posledně i bokorys, který zobrazuje kolmý pohled na zobrazovaný objekt z boční strany. Lze rozlišovat dva typy bokorysů, a to bokorys zprava a bokorys zleva. V některých případech se oba dva tyto typy bokorysů mohou shodovat, v jiných případech mohou být ale odlišné.

1.5.5 Hanojské věže

Hanojské věže je všeobecně nazývaný matematický hlavolam, který vymyslel francouzský matematik Édouard Lucas v roce 1883. Skládá se ze tří kolíků. Na začátku je na jednom z nich nasazeno několik kotoučů různých poloměrů, seřazených od největšího po nejmenší. A právě toto uspořádání kotoučů různých poloměrů na jednom kolíku vedlo k vytvoření zadání různých úloh vhodných k procvičování např. kolmých pohledů na válce o splývajících osách, ale o různých poloměrech (viz obr. 4). Takováto úloha společně s jejími různými alternativami zadání bude podrobněji popsána v následující kapitole této práce.



Obrázek 4 - Hanojské věže

2 Mathematikus

Dříve, než pojednám o interaktivní webové platformě Mathematikus, představím projekt iTEM, jehož někteří řešitelé patří mezi spoluvůrce této interaktivní webové platformy a s jehož finanční podporou byla webová platforma Mathematikus přeprogramována externí webdesignovou firmou do současné podoby.

2.1 Projekt iTEM

2.1.1 Základní informace o projektu iTEM

Projekt iTEM, celým názvem „Improve Teacher Education in Mathematics“ (Zlepšování výuky učitelů matematiky), je projekt programu Vzdělávání financovaného z Fondů EHP 2014 – 2021. Prostřednictvím Fondů EHP přispívají Island, Lichtenštejnsko a Norsko ke snižování ekonomických a sociálních rozdílů v Evropském hospodářském prostoru (EHP) a k posilování spolupráce s 15 evropskými státy.

Fondy EHP podporují spolupráci několika organizací, jejichž nejvýznamnějším záměrem je součinnost mezi více národy. Podílejícími se národy jsou mj. Česká republika, Norsko, Lichtenštejnsko a Island. V programu Vzdělávání se Fondy EHP snaží propojit všechny úrovně vzdělávání. Přitom důležitými tématy tohoto programu jsou především aktivní občanství, demokracie a inkluzivní vzdělávání. Cílem celkové spolupráce je dopad na výuku, v níž jsou využity nové výukové metody a postupy, které budou více přínosnější a obohacující pro studium žáků a studentů.

Projekt iTEM patří v programu Vzdělávání mezi projekty tzv. Institucionální spolupráce. Spolupracujícími institucemi v projektu iTEM jsou Technická univerzita v Liberci a NORD Universitet, Norsko. Na projektu pracují na každé z partnerských univerzit trojčlenné řešitelské týmy. Jedná se o akademické pracovníky z kateder matematiky. Členy řešitelského týmu na Katedře matematiky a didaktiky matematiky Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické Technické univerzity v Liberci jsou Daniela Bímová, Jiří Břehovský a Petra Pirklová. Klaus-Peter Eichler, Dag Oskar Madsen a Asif Mushtaq tvoří řešitelský tým na katedře Mathematics Teaching and Learning, NORD Universitet, kampus Bodø [13].

Projekt iTEM byl původně dvouletým projektem, ale díky celosvětové pandemické situaci spojené s onemocněním COVID-19 bylo jeho řešení prodlouženo

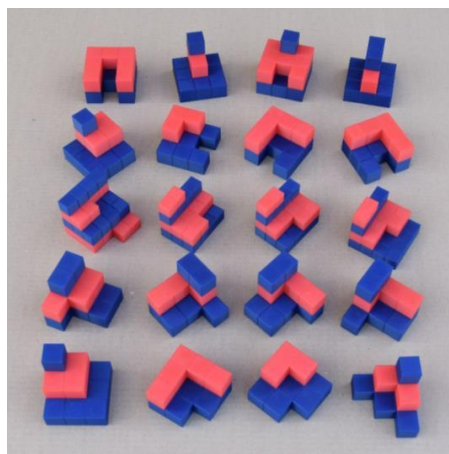
o jeden rok. Projekt iTEM je tedy řešený v období od 1. srpna 2020 do 31. července 2023.

Jedním z několika hlavních cílů projektu je prozkoumat vzorky práce žáků s dvourozměrnými animacemi, např. jako jsou ty, které nabízí interaktivní webová platforma Mathematikus, za účelem jejich využití k rozvoji prostorové představivosti žáků. Dalšími cíli projektu iTEM jsou rozšíření vhodných úloh určených k rozvíjení prostorové představivosti žáků a poskytnutí návodů k vytváření modelů reálných objektů pomocí 3D tisku mezi širokou veřejností, a to nejen v České republice a v Norsku, ale i v dalších evropských zemích.

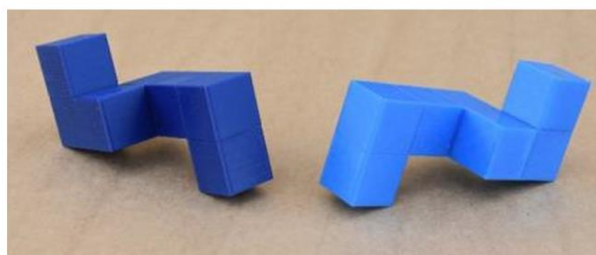
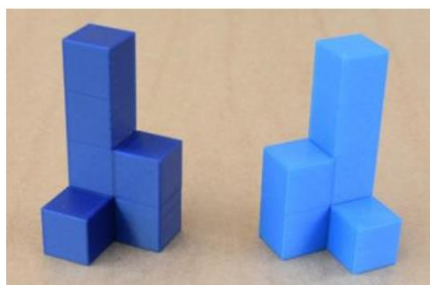
2.1.2 Projekt iTEM a platforma Mathematikus

Interaktivní webová stránka Mathematikus byla původně naprogramována v Německu pomocí softwarové platformy Adobe Flash, která postupem času zastarala a od počátku roku 2021 již nebyla více podporována. Za účelem zachování funkčnosti interaktivní webové platformy Mathematikus i pro další období bylo potřeba tuto interaktivní webovou platformu přepracovat a především přeprogramovat. A právě díky řešení projektu iTEM byla interaktivní webová platforma Mathematikus v roce 2020 přeložena do dalších jazyků (češtiny a norštiny) a externí německou webdesignovou firmou přeprogramována do dnešní podoby [15]. Přeprogramování platformy Mathematikus také mj. umožnilo uživatelům ovládat tuto platformu a řešit úlohy umístěné na ní pomocí dotyku prstu či pera na dotykových obrazovkách notebooků, tabletů, anebo smartphonů.

Interaktivní webová platforma ještě není v současné chvíli zcela dokončena, členové projektových týmů obou partnerských univerzit se snaží vymýšlet náměty dalších vhodných úloh a tematických celků. Jedním z plánovaných tematických celků, které by mohly rozšířit staré moduly o nové, je tematický celek věnovaný 3D tisku, resp. je plánováno přidání modulu obsahujícího soubory s vytvořenými modely k 3D tisku. Reálné vytištěné modely jsou přitom vytvářeny tak, aby odpovídaly např. modelům krychlových těles (viz obr. 5), rotujících těles (viz obr. 6) nebo modelu hradu (viz obr. 7) pro úlohy uvedené v platformě Mathematikus.



Obrázek 5 - Modely krychlových těles vytištěné na 3D tiskárně pro jednotlivé podúlohy úlohy s názvem "Rozbité krychle"



Obrázek 6 - Modely nepřímo shodných krychlových těles vytištěné na 3D tiskárně pro dvě podúlohy s názvem "Rotující tělesa"



Obrázek 7 - Model hradu pro úlohu Rytíř Runkel vytištěný na 3D tiskárně



Obrázek 8 - Detail podúlohy 2 na modelu hradu vytištěném na 3D tiskárně

2.2 Prostředí Mathematikusu

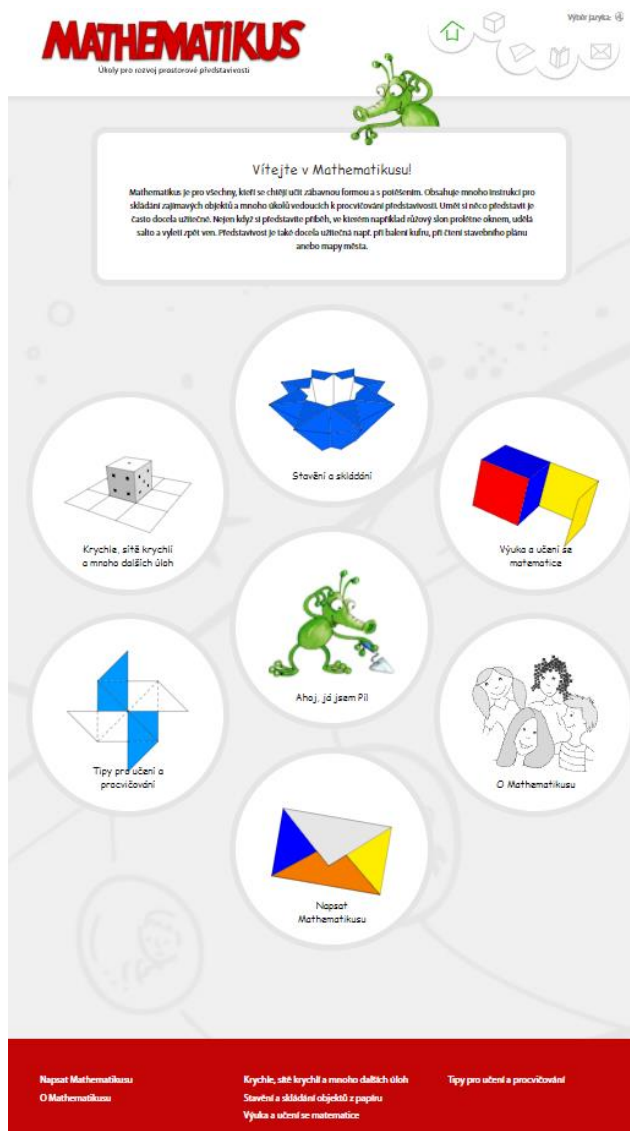
2.2.1 Stručné poznámky o Mathematikusu

Mathematikus je interaktivní webová platforma obsahující úlohy určené k rozvoji a procvičování prostorové představivosti. Úlohy jsou svou obtížností vhodné především pro žáky prvního stupně základních škol. Díky animačním procesům platformy jsou žákům poskytnuty rozfázované jednotlivé kroky řešení úloh, čímž je jim graficky znázorněna okamžitá zpětná vazba. Animační procesy neukazují pouze správná řešení úloh, ale i ta chybná, aby se žáci mohli zamyslet nad tím, kde a jakou chybu v řešení učinili. Speciálně naprogramované virtuální animace také mj. napomáhají žákům představit si postupný proces principů tvoření a skládání různých papírových modelů. Výhodou Mathematikusu je opakovaný návrat k jednotlivým geometrickým úlohám a k jejich řešení. Webová platforma žáky nikam nepopohání, a tak si každý uživatel může pracovat svým vlastním pracovním tempem.

Interaktivní webová platforma Mathematikus je spustitelná a funkční v kterémkoli internetovém prohlížeči. V důsledku toho je možné zařazovat řešení úloh umístěných na ní během hodin geometrie, ale i jako domácí úlohy k procvičování. V takových případech je dokonce žákům povoleno využívat vlastní elektronické zařízení – smartphony či tablety, anebo učitel při výuce využije práci s interaktivní tabulí.

2.2.2 Moduly Mathematikusu

Webová stránka Mathematikus je rozdělena do několika modulů, které jsou nápomocné žákům, učitelům, ale také rodičům, kteří chtějí, aby jejich děti využívaly čas u elektronického zařízení smysluplně. Na interaktivní webové stránce Mathematikus se nachází několik úloh, při jejichž řešení si mohou žáci vyzkoušet, zda a jak úspěšně jsou schopni řešit úlohy nejen z tzv. spontánní stereometrie. Přitom spontánní stereometrií rozumíme takovou část prostorové geometrie, v níž jsou k řešení úloh potřeba pouze přirozená intuice, prostorová představivost, prostorová orientace a základní znalosti o rovinných a prostorových objektech. Žádné speciální znalosti zapotřebí nejsou.



Obrázek 9 - Úvodní strana interaktivní webové stránky Mathematikus

Na obrázku (viz obr. 9) je znázorněna úvodní strana webové platformy Mathematikus. Už na první pohled si lze všimnout, že stránka je velice příjemně navržena a orientace na ní je jednoduchá. Každý jistě hned bude vědět, díky její uspořádanosti a přehlednému zobrazení jednotlivých modulů na ní, kde se co nachází.

Při návštěvě webové stránky Mathematikus mohou uživatelé volit mezi několika jazykovými mutacemi. Tvůrci Mathematikusu mysleli na možnost využití Mathematikusu nejen pro žáky jedné země, ale mají v úmyslu rozšíření Mathematikusu do vícera zemí. Z tohoto důvodu přeložili Mathematikus do několika jazyků (angličtiny, němčiny, norštiny, češtiny, plánují se i překlady do dalších jazyků, např. do španělštiny, ruštiny aj.) Uživatel si může zvolit jazyk Mathematikusu pomocí speciálně vytvořeného rolovacího tlačítka s nabídkou jazyků, které se nachází v pravém horním rohu hlavní

stránky Mathematikusu. Využívat k překladu Mathematikusu webový prohlížeč není vhodné. Sama z vlastní zkušenosti vím, že webový prohlížeč překládá některé pasáže Mathematikusu naprosto nesmyslně.

Symbody (domeček, krychle, list papíru, kniha, obálka), které se nachází v pravém horním rohu hlavní stránky okolo tlačítka pro volbu jazyka, značí interaktivní rychlodkazy. Analogické odkazy se nacházejí v kruzích na hlavní stránce. Symbody umístěné v pravém horním rohu Mathematikusu pomáhají uživateli k přechodu do jiné části Mathematikusu během jednotlivých činností. Co se skrývá pod jednotlivými odkazy, rozebereme v následujícím textu.

V prostředním kruhu je zakreslena zelená příšerka. Tvůrci Mathematikusu ji pojmenovali Pí. Příšerka Pí provází uživatele moduly Mathematikusu, představuje zadání úloh a úkolů.

Moduly, které obsahují úlohy k procvičování, najdeme pod odkazy v kruzích s obrázky hrací kostky a misky ve tvaru „hvězdy“. Po kliknutí na hrací kostku se otevře nabídka úloh, které se týkají sítí krychlí, odvalování hrací kostky, rotujících těles a podobně. Miska ve tvaru „hvězdy“ znázorňuje další možnost využití platformy, kterou je stavění a skládání různých modelů z papíru. Předdefinované papírové modely si pomocí vizuálně naprogramovaných jednotlivých kroků mohou žáci zkusit také složit. Některým žákům zde ale může činit potíže ta skutečnost, že virtuálně naprogramované animační kroky jsou rovinné, ale některé skládané modely jsou prostorové.

Výuka a učení se matematice je modul spíše určený pro učitele. Objevují se v něm články obsahující tipy a rady, jak žáky vyučovat, jak je vést, jak žáky nechat přemýšlet o výuce jako o komplexní činnosti. Nevýhodou těchto článků je německý jazyk, který by pro někoho mohl být problematický.

V dalším kruhu pojmenovaném „O Mathematikusu“ se dočteme hlavní myšlenku Mathematikusu a také o zmiňovaném projektu iTEM. Nalezneme tu též nejzákladnější informace o cílech projektu, podílejících se projektantech, o tvůrcích a programátorech Mathematikusu a také o tom, kdo se podílí na financování Mathematikusu.

Poslední kruh obsahuje odkaz na tipy pro učení a procvičování, na těch se stále pracuje, a proto je tento modul Mathematikusu stále ještě ve výstavbě. Tento modul bude obsahovat tipy, jak se učit matematice, prostorovému vnímání a jak procvičovat prostorovou představivost žáků.

Nejspodněji umístěným kruhem je kruh s obálkou, obsahující odkaz s názvem „Napsat Matematikusu“, který jsem na závěr chtěla vyzdvihnout. Tento odkaz dává uživatelům možnost zaslání zprávy tvůrcům Matematikusu. Líbí se mi, že se objevuje šance napsat přímo lidem, kteří tento web vytvořili. Lze jim tedy poslat ať už zpětnou vazbu, připomínku, či komentáře, které uživatele napadly. Takto se na tvorbě Matematikusu může vlastně podílet každý jeho uživatel, tedy i jakýkoliv žák, učitel, případně i rodič. A učitelé díky Matematikusu získají vhodný elektronický materiál určený především k trénování a rozvíjení prostorové představivosti žáků. Mohou jej využívat nejen v hodinách matematiky, resp. geometrie, ale vzhledem k online dostupnosti Matematikusu mohou úlohy z něj zadat žákům i jako samostatné procvičování na doma.

2.3 Příklady úloh

Mathematikus nabízí ihned několik různých typů úloh zaměřených na procvičování prostorové představivosti. Následně bych ráda ukázala zadání a řešení vybraných úloh nacházejících se v Matematikusu. Více budu jednotlivé úlohy rozebírat v další části práce, ve které budu popisovat, jak žáci s Matematikusem při výuce pracovali.

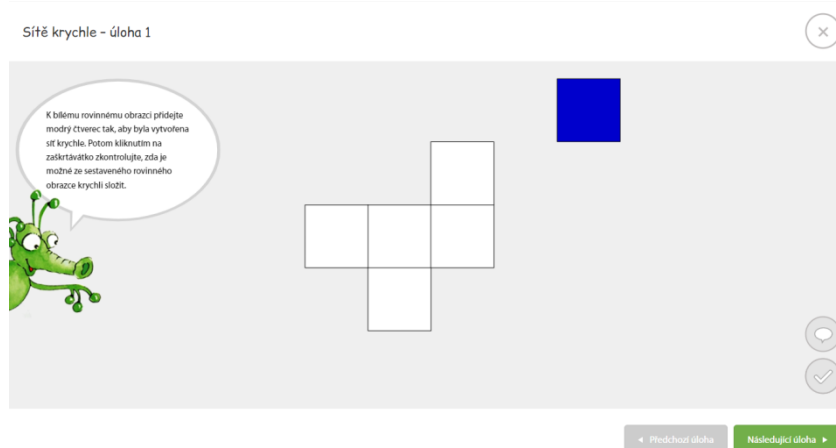
Každý typ úlohy obsahuje 5 – 6 podúloh se stejným zadáním, které uživateli vždy představí příšerka Pí. Po nějaké chvilce automaticky zmizí zadání podúloh. Pomocí myšlenkové bubliny, nacházející se v pravém dolním rohu okna podúlohy, si ho uživatel může znovu zobrazit. Jednotlivé podúlohy se dají plnit buď zaškrtnutím vybrané volby z předložené nabídky (např. úlohy s názvem „Rozbité krychle“), nebo stisknutím zvoleného předdefinovaného tlačítka (např. úlohy pojmenované „Odvalování hrací kostky“), anebo interaktivní manipulací s vytvořenými objekty na obrazovce (např. úlohy pro téma „Sítě krychle“).

Úlohy jsou naprogramované takovým způsobem, že pokud není příslušná úloha správně vyřešena, je tlačítko „Následující úloha“ nefunkční, tj. uživatel bez správného splnění příslušné úlohy nemůže pokračovat k další úloze stejného typu úloh.

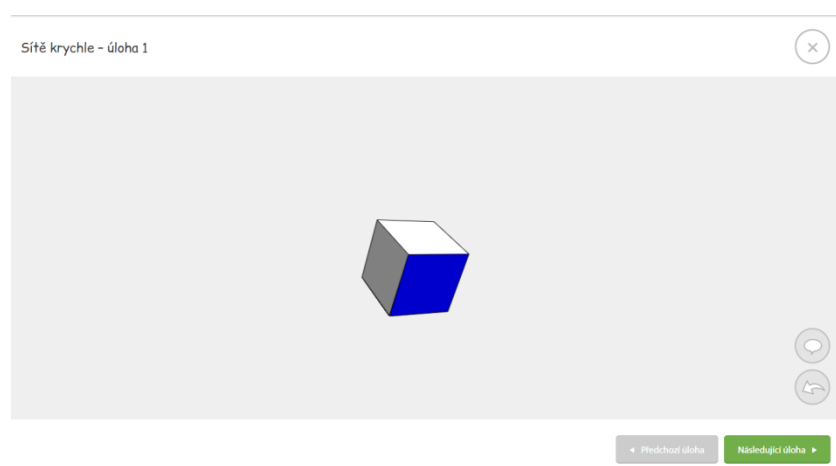
Velkou výhodou je naprogramování úloh Matematikusu tak, že uživateli je okamžitě po zvolení, resp. nastavení odpovědi a po jejím potvrzení pomocí kliknutí na tlačítko se zaškrťátkem, nacházející se v pravém dolním rohu okna podúlohy,

znázorněna zpětná vazba. Tzn. je zpravidla s využitím interaktivních animací ukázáno, zda je vybrané, resp. vytvořené řešení příslušné podúlohy správné či nikoliv.

U podúkolů týkajících se sítě krychle se kontrola správnosti řešení ukáže zabalením sítě do krychle (viz obr. 10). Pokud se síť při kliknutí na ikonu se zaškrtnutím nezabalí správně, tj. pokud se ze sítě nevytvoří celistvá krychle (některá z jejích stěn není sítí pokryta, protože některý ze čtverců sítě pokrývá již jiným čtvercem sítě zakrytou stěnu krychle), je řešení úlohy provedeno špatně. Jednotlivé podúlohy tématu „Sítě krychle“ počítají s více možnostmi správného řešení, což mi přijde jako povzbuzující. Žáci díky tomu mohou podúlohu zkusit vyřešit několikrát za sebou a hledat tak nejenom jedno, ale více možných správných řešení příslušné podúlohy. Tato situace jim názorně ukazuje, že úlohy nemusí mít striktně pouze jedno správné řešení, ale že správných řešení může existovat někdy i více.



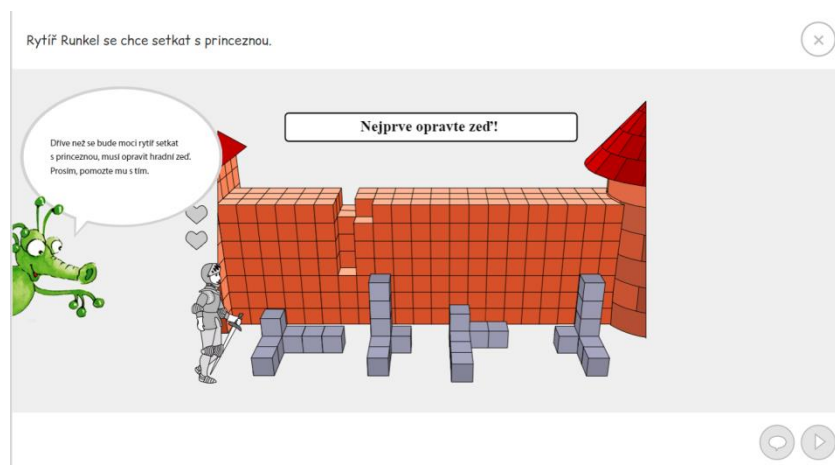
Obrázek 10 - Ukázka zadání jedné z podúloh úlohy 1 pro téma "Sítě krychle"



Obrázek 11 - Ukázka vzorového řešení úlohy 1 pro téma "Sítě krychle"

Dalším úkolem je pomoc rytíři Runkelovi s opravami děr ve zdech hradu (viz obr. 12). Rytíř Runkel má za úkol opravit díry (otvory po vypadlých krychlových tělesech) v hradební zdi proto, aby mohl získat princeznu. Žáci musí z dané nabídky zvolit správné krychlové těleso, které vhodně vyplní díru ve zdi tak, aby zeď byla celistvá a bez jakékoliv dutiny. Při výběru a následném vložení zvoleného krychlového tělesa si mohou uživatelé pomoci šipkami. Volbou šipek se pak krychlové těleso pomocí naprogramovaných virtuálních animací otáčí a následně po kliknutí na něj myší zapadne do mezery v hradní zdi. Interaktivně naprogramované animace zapadnutí krychlových těles do děr v hradebních zdech ukazují, zda uživatelé zvolili správné krychlové těleso. Správnost volby je znázorněna celkovým zapadnutím krychlového tělesa do příslušné díry v hradební zdi, na druhou stranu po chybně zvoleném (zpravidla nepřímě shodném) krychlovém tělese je názorně vidět přesah některé dílčí krychle, resp. některých dílčích krychlí mimo povrch hradebních zdí. I u této úlohy existuje v některé z pěti podúloh více možných řešení. Jsou jimi přímo shodná krychlová tělesa, která jsou jen jinak otočena, či postavena.

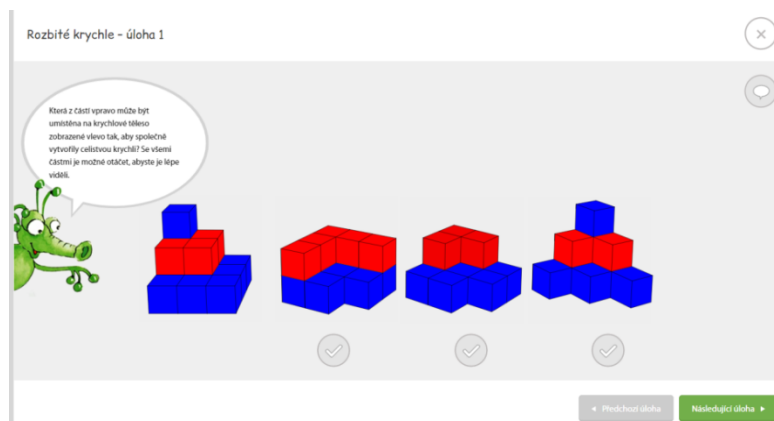
Myslím, že žáci mají rádi pohádky. Přesah k tématu pomoci druhým mi přijde velice přínosný k utváření kamarádského a nápomocného třídního kolektivu.



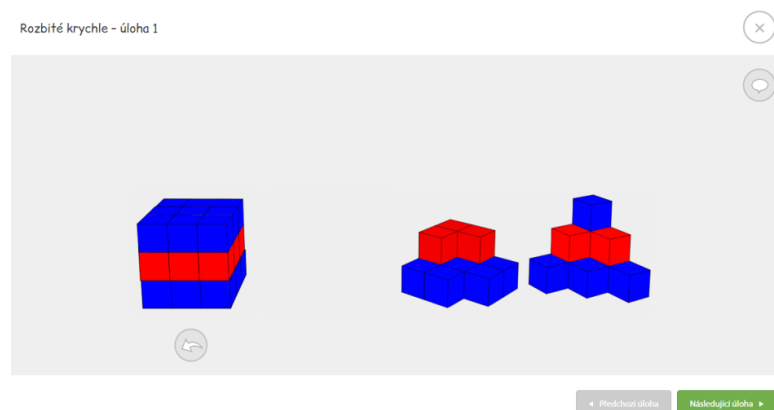
Obrázek 12 - Ukázka zadání jedné z podúloh úlohy pro téma "Rytíř Runkel"

U úloh týkajících se tématu „Rozbité krychle“ (viz obr. 13) mají žáci z nabízených možností vybrat takové krychlové těleso, které doplní krychlové těleso umístěné vlevo do celistvé krychle (viz obr. 14). Zde si mohou uživatelé jednotlivými krychlovými tělesy (pomocí myši na obrazovce monitoru, nebo pomocí prstu, či dotykového pera na dotykovém displeji elektronického zařízení) otáčet pro vytvoření

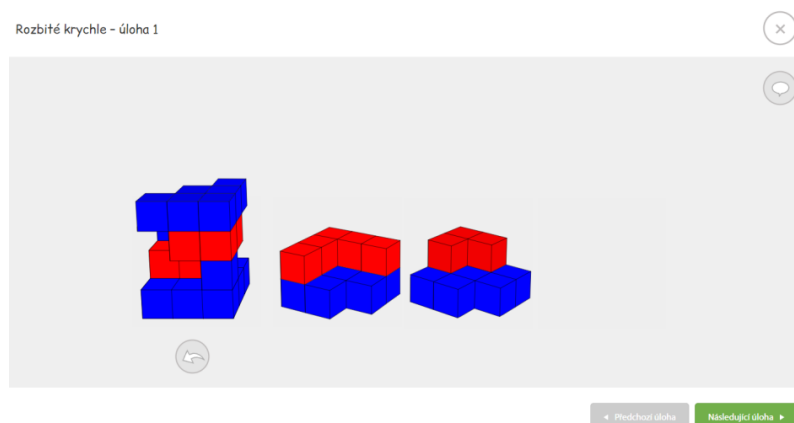
si lepší představy vzhledu a tvaru příslušného krychlového tělesa. Při zakliknutí vybraného krychlového tělesa z nabídky se toto krychlové těleso přemístí pomocí naprogramované animace na krychlové těleso umístěné vlevo a uživatel ihned uvidí, zdali zvolil správnou možnost řešení, či nikoliv. V podúlohách tohoto typu úlohy je vždy jen jedno správné řešení. Jako ukázkou jsem přidala i obr. 15, kde je zvoleno špatné řešení.



Obrázek 13 - Ukázka zadání jedné z podúloh úlohy pro téma "Rozbité krychle"



Obrázek 14 - Ukázka správného řešení podúlohy 1 pro téma "Rozbité krychle"



Obrázek 15 - Ukázka špatného řešení podúlohy 1 pro téma "Rozbité krychle"

Jednotlivým úlohám vloženým v platformě Mathematikus se budu věnovat v další, výzkumné části této práce. Tam každou úlohu popíši detailněji i s konkrétními ukázkami jejího řešení žáky, zmíním též spolupráci žáků ve dvojicích při řešení jednotlivých úloh, tu následně porovnam s jejich prací, resp. řešením úloh.

2.4 Možnosti využití Mathematikusu ve výuce

Vzhledem k faktu, který jsem uvedla již dříve, a to vzhledem k možnosti využití Mathematikusu kdykoliv a kdekoliv v dosahu internetového připojení, je vhodné výuku matematiky touto interaktivní webovou stránkou trochu oživit a ukázat tak žákům nabídku dalšího způsobu procvičování jejich prostorové představivosti.

Je potřebné, aby byly žákům ukazovány různorodé přístupy a metody učení, a to ať už při výkladu nové látky, při procvičování či opakování učiva, které již znají. Myslím, že při procvičování jejich prostorové představivosti pomocí Mathematikusuje upoutáme tím, že budou moci pracovat buď s interaktivní tabulí, či s využitím vlastního smartphonu nebo školního počítače. Poskytnutí okamžité zpětné vazby, kterou naprogramované virtuální animace v ukázkách řešení jednotlivých podúloh Mathematikusu názorně zobrazují, je pro žáky velmi přínosné z hlediska uvědomění si případné chyby.

Sama bych nabídku práce s Mathematikusem využila pro vytvoření lepší představy a vysvětlení tématu prostorové představivosti. Je možné pracovat jako celá skupina společně, kdy budeme dohromady vypracovávat jednotlivé úkoly a vysvětlovat si případné nejasnosti. Žáci mohou chodit k interaktivní tabuli a řešit příslušné úlohy dotykem. Další variantou je vytvoření pracovních listů, na nichž žáci uvidí zadání odpovídajících úloh pouze ve 2D. Nechat žáky zkusit, jak budou schopni vypracovat úlohy poznamenané pouze na pracovním listu a jak budou následně schopni provést kontrolu v součinnosti s internetovou stránkou Mathematikus. Tyto činnosti budu porovnávat ve výzkumné části této diplomové práce. Pokud budeme využívat platformu Mathematikus pro opakování, či procvičování tématu, domluvíme se s žáky na přinesení si vlastních smartphonů, resp. tabletů, či ve škole domluvíme možnost využití učebny s počítači, aby každý žák mohl, či výhodněji dvojice žáků mohla pracovat samostatně a komunikovat tak o možnostech řešení. Je možné použít platformu Mathematikus pro zpestření výuky v hodině, případně v hodinách matematiky, a předložit tak žákům uvedená zajímavá, ale často opomíjená témata, zábavnějším a méně tradičním

způsobem. Jistě můžeme žákům zadat úlohy spojené s krychlí či s krychlovými tělesy, nebo skládání papírových modelů k domácí přípravě, kdy s žáky nebudeme řešit jednotlivé výsledky, ty uvidí na počítači sami, ale spíše s nimi budeme konzultovat jejich postupy a způsoby přemýšlení, myšlenkové procesy, které je napadaly během vypracovávání úloh. Vytvořené modely z modulu „Skládání a stavění“ žáci mohou donést ve finální reálné podobě či je mohou zdokumentovat fotografiemi. Při řešení některých úloh bych se nebála zkusit použít reálné předměty jako hrací kostky, síť krychlí vystřižené z papíru a různé modely krychlí, např. ze stavebnic, na stavby krychlových těles, aby si žáci jednotlivé úlohy představili i ve skutečném materiálním reálném světě, mohli si předměty prohlédnout očima, případně osahat rukama. Díky těmto skutečnostem mohou při řešení úloh využít více smyslů, případně využijí pro nalezení správného řešení úlohy manipulativních činností. Reálné modely jsou nápomocné především pro slabší žáky, kteří mohou mít problémy s vytvořením si správných představ na základě naprogramovaných dvourozměrných virtuálních animací. Žáci tak vidí, že pokud správné řešení dokážou určit pouze s využitím svých představ, je to rychlejší a také k tomu nepotřebují vyhledávat žádné další pomocné předměty. Toto uvědomění si je může motivovat k záměrnému rozvíjení jejich prostorové představivosti. To může být představováno i tím, že žáci začnou sami podobné úlohy vyhledávat a řešit, což je pro učitele pozitivní zpětná vazba.

Uvědomuji si, že každý z nás nemusí mít prostorovou představivost na vyšší úrovni, ale pomocí trénování a zadávání různých, speciálně zaměřených úloh můžeme tuto schopnost mozku prohlubovat a zlepšovat. Mnoho učitelů probere např. téma spontánní stereometrie pouze okrajově, protože k této problematice nemají potřebné znalosti a schopnosti, ale ani materiály a nápady. Domnívám se, že právě s touto nejistotou, nabídkou vhodných úloh k trénování prostorové představivosti by mohla platforma Mathematikus pomoci.

3 Náměty úloh k rozšíření stávajících úloh zařazených v Mathematikusu

Hlavní náplní této kapitoly je předložit sadu vhodných úloh k procvičování a rozvíjení prostorové představivosti žáků, a to především takových úloh, které by mohly doplnit stávající úlohy v příslušných modulech Mathematikusu, případně které by mohly rozšířit existující moduly Mathematikusu o nové. Úlohy je možné na základě jejich obsahu, resp. podle cílů jejich zaměření, tj. podle oblastí, jež mají být procvičovány, rozdělit do různých kategorií. Tyto kategorie mohou odpovídat některým oblastem zájmu spontánní stereometrie, těmi jsou např. základní geometrická tělesa, krychlová tělesa, pravoúhlé pohledy na tělesa, sítě těles, odvalování těles apod. Úlohy procvičující témata uvedených a podobných typů nevyžadují žádné speciální znalosti z geometrie. K jejich vyřešení by měly být postačující pouze základní znalosti o geometrických tělesech, terminologie spojená s geometrickými tělesy (názvy základních těles a jejich částí, vztahy mezi nimi), ale i jistá úroveň prostorové představivosti.

Z uvedených důvodů lze úlohy zaměřené k procvičování a rozvíjení prostorové představivosti žáků zařazovat průběžně ve vyučovacích hodinách matematiky nejen ke zpestření výuky, ale i k trénování prostorové vizualizace ať už zobrazených (ve dvourozměrné rovině, tj. na listu papíru, displeji počítače atp.) či reálných trojrozměrných objektů v představách žáků. Přitom každou takovou úlohu je možné gradovat na potřebnou úroveň žáků dle jejich dosavadních znalostí a zkušeností.

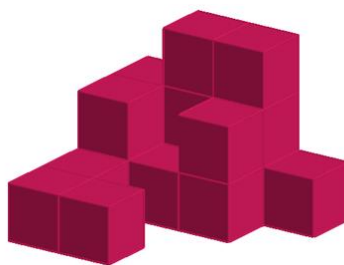
3.1 Úlohy pro téma „Krychlová tělesa“

3.1.1 Úloha 4.1 a)

Zadání úlohy:

Na obr. 16 je znázorněno krychlové těleso. Napište, z kolika jednotkových krychlí se znázorněné krychlové těleso skládá.

Poznámka: Spodní vrstva krychlového tělesa je umístěna na čtverci o rozměrech 4 x 4 jednotkových čtverců.



Obrázek 16 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 a)

Vzorové řešení úlohy:

Úkolem této úlohy je spočítat, z kolika jednotkových krychlí se skládá znázorněné krychlové těleso, které je umístěné na čtverci o rozměrech 4 x 4 jednotkových čtverců. Na základě uvedené podmínky úlohy je z obr. 16 zřejmé, že se ve spodní vrstvě krychlového tělesa se nachází 10 jednotkových krychlí, ve druhé vrstvě je umístěno 5 jednotkových krychlí a ve třetí vrstvě 2 jednotkové krychle. Sečteme-li počty jednotkových krychlí nacházejících se v jednotlivých vrstvách krychlového tělesa, zjistíme, že krychlové těleso znázorněné na obr. 16 se skládá z celkem $(10 + 5 + 2 =)$ 17 jednotkových krychlí.

Metodické pokyny:

Již s malými dětmi předškolního či školního věku počítáme, z kolika krychlí se skládá stavba z kostek. Tím pádem je zadání této úlohy velmi známé pro široké spektrum řešitelů. Ovšem v některých případech někdo z nich neví, jak správně dojít ke zdárnému výsledku.

Zadanou úlohu je možné řešit alespoň třemi různými metodami. První metodou je určování jednotkových krychlí přímo ze zakresleného obrázku. Při užití této metody je mimo jiné zapotřebí, aby si řešitelé dokázali ve svých představách uvědomit, kolik

jednotkových krychlí daného krychlového tělesa není ze zobrazeného úhlu pohledu viditelných. Např. na obr. 16 nejsou ve spodní vrstvě krychlového tělesa vidět čtyři jednotkové krychle. Jejich existence však vyplývá z pozic čtyř jednotkových krychlí ve druhé vrstvě, které jsou právě na těchto čtyřech, z daného úhlu pohledu neviditelných, jednotkových krychlích položeny.

Tuto skutečnost je možné ověřit při užití druhé metody, v rámci níž si řešitelé mohou pomoci postavením reálného modelu krychlového tělesa např. z pěnových, dřevěných či plastových kostek. Mají-li řešitelé krychlové těleso postavené, zkontrolují, zda jeho vzhled odpovídá znázorněnému obrázku. Pokud je tomu tak, mohou následně spočítat jednotkové krychle, ze kterých se krychlové těleso skládá. Je-li pro některého z řešitelů obtížné spočítat jednotlivé jednotkové krychle v celkovém složeném krychlovém tělese, může toto těleso rozebrat na dílčí jednotkové krychle, které poté spočte.

Třetí metodou k určení počtu jednotkových krychlí v krychlovém tělese může být využití zobrazení krychlového tělesa buď v 3D geometrickém softwaru, anebo na interaktivní webové stránce, např. Mathematikus. V elektronické verzi úlohy by bylo vhodné, aby bylo možné s krychlovým tělesem otáčet. Toto prostorové zobrazení by pak řešitelům mohlo nabídnout natočení krychlového tělesa ze všech různých úhlů pohledu. To umožní řešitelům zobrazit si viditelně v původním úhlu pohledu neviditelné jednotkové krychle.

Pokud řešitelé nemají k dispozici žádné pomůcky, jsou při řešení této úlohy nuceni k vytváření si pouze obrazu krychlového tělesa ve svých představách. Následně pak využijí k řešení úlohy první výše uvedenou metodu řešení úlohy.

Další varianty úlohy:

Za jednu z variant této úlohy můžeme považovat zobrazení daného krychlového tělesa např. v nadhledu zleva či v podhledu zprava apod.

Jinou z variant je odlišný způsob znázornění krychlového tělesa. Krychlové těleso může být zadáno např. pomocí různých stylů kótových zápisů (viz obr. 17). Jedním stylem kótového zápisu je uvedení počtu krychlí, které se nacházejí v jednotlivých sloupcích, ze kterých se krychlové těleso skládá. V tomto případě kótového zápisu je výpočet jednotkových krychlí, z nichž je krychlové těleso složeno, jednoduchý. Stačí sečíst všechna zapsaná čísla vyskytující se v kótovém zápisu krychlového tělesa.

8	5	3	4
6	4	2	3
5	4	3	1
1	2	2	1

Obrázek 17 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 a) - další varianta úlohy

Otázkou je, zda si tuto skutečnost uvědomí i řešitelé úlohy. Další možností kótového zápisu krychlového tělesa je zapsání krychlí nejen v příslušném sloupci, ale také v odpovídající vrstvě. Např. zápis „1, 2“ v jednom ze čtverců zobrazeného půdorysu krychlového tělesa představuje umístění jedné krychle ve spodní (první) vrstvě a jedné krychle ve druhé vrstvě téhož sloupce. V tomto případě při hledání správného řešení úlohy sečteme číslice, které označují umístění jednotkových krychlí v jednotlivých vrstvách. Komplikovanějším zobrazením krychlového tělesa je jeho zobrazení pomocí půdorysu, nárysu a bokorysu. V tomto případě není již tak snadné ihned určit, z kolika jednotkových krychlí je dané krychlové těleso složeno.

3.1.2 Úloha 4.1 b)

Zadání úlohy:

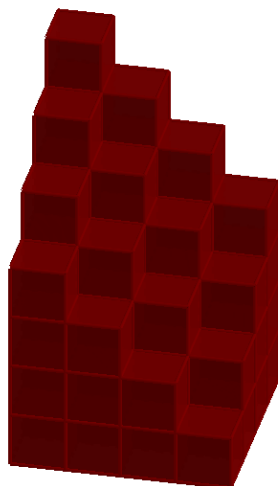
Na obr. 18 je zobrazen plán krychlového tělesa. Čísla zapsaná v jednotlivých čtvercích plánu představují počet jednotkových krychlí, které se v příslušném sloupci krychlového tělesa nacházejí. Z kostek stavebnice postav krychlové těleso podle uvedeného plánu.

7	6	5	4
6	5	4	3
5	4	3	2
4	3	2	1

Obrázek 18 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 b)

Vzorové řešení úlohy:

Tato úloha má jednoznačné řešení. Na základě daného kótového zápisu je možné sestavit právě jedno krychlové těleso. Výsledné krychlové těleso je na obr. 19 zakresleno v rovnoběžném promítání.



Obrázek 19 - Náměty úloh - krychlová tělesa - zobrazení krychlového tělesa v rovnoběžném promítání

Metodické pokyny:

Správné vyřešení této úlohy spočívá především v pochopení uvedeného kótového zápisu krychlového tělesa. Vytvoření si odpovídající představy zadaného krychlového tělesa bez jeho složení pomocí kostek stavebnice může být pro některé řešitele náročnější. Proto úspěšné splnění úkolu úlohy může některým řešitelům pomoci právě s vytvářením si správných představ vizualizace krychlového tělesa zapsaného pomocí daného kótového zápisu.

Při řešení úloh tohoto typu během hodin matematiky je nutné, aby žáci měli přístup ke kostkám ze stavebnice (ať už pěnovým, plastovým či dřevěným). Ty budou pro vypracování této úlohy potřeba. Žáci mohou kontrolu správného postavení krychlového tělesa provádět ve dvojicích sami a následně také mohou vymýšlet další vlastní plány krychlových těles sobě navzájem.

Další varianty úlohy:

Další varianty této úlohy mohou spočívat např. v jiném způsobu zadání sestavovaného krychlového tělesa. Za jiný způsob zadání krychlového tělesa lze považovat např. druhý, výše popsáný způsob kótového zápisu, anebo zakreslení krychlového tělesa pomocí jeho půdorysu, nárysu a bokorysu.

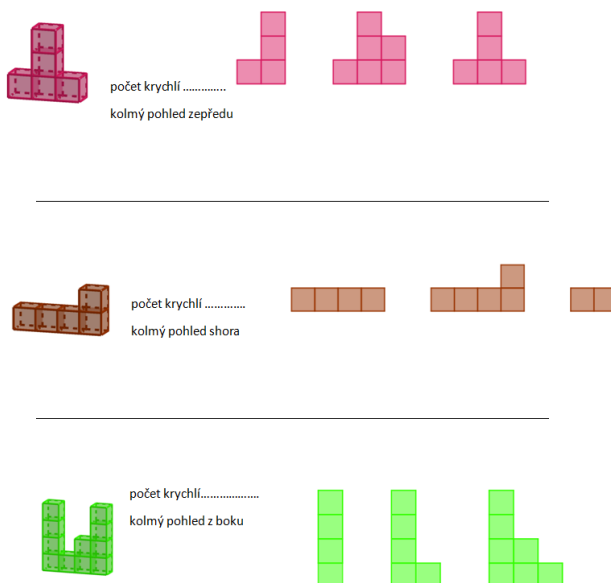
Komplikovanější alternativou úlohy může být např. zadání krychlového tělesa pomocí kótového zápisu uvedeného v zadání této úlohy, úkolem úlohy však nebude postavení tohoto krychlového tělesa, ale krychlového tělesa, které doplní zadané krychlové těleso do kváдру o rozměrech $4 \times 4 \times 8$ jednotkových krychlí.

I pro tuto úlohu je možné naprogramovat virtuální verzi. V úloze speciálně naprogramované a následně vložené např. do platformy Mathematikus bude důležité, aby řešitelé měli dostatečný počet jednotkových krychlí, které budou interaktivně pomocí vizuálních animací stavět na plánek. Ovšem ve složitější alternativě této úlohy může být pro zjištění soustředění se řešitele na splnění úkolu úlohy zobrazeno více jednotkových krychlí, než je potřeba k sestavení správného krychlového tělesa. Řešitel tak v tomto případě musí přijít na to, že jsou nabízeny i další jednotkové krychle, které již nepotřebuje.

3.1.3 Úloha 4.1 c)

Zadání úlohy:

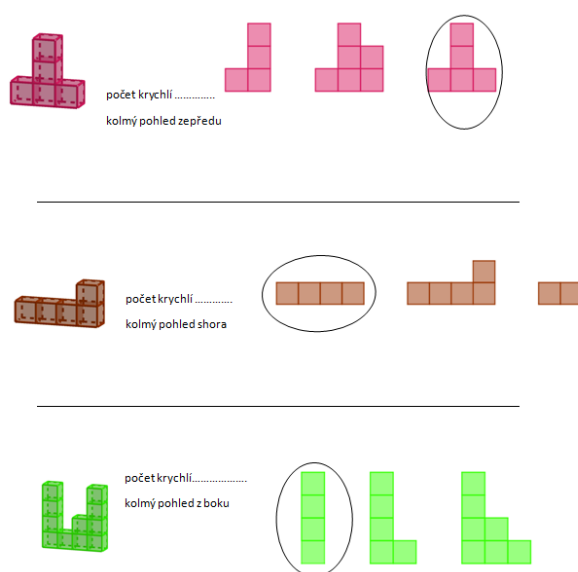
Na obr. 20 jsou zakreslena krychlová tělesa. Na základě vyobrazení krychlových těles v rovnoběžném promítání (obrázky krychlových těles v levém sloupci) určete počty jednotkových krychlí, ze kterých jsou jednotlivá krychlová tělesa postavena. Následně v každém řádku vyberte a zakroužkujte ten rovinný obrazec, který představuje zadaný kolmý pohled na příslušné zobrazené krychlové těleso. Dávejte pozor, u každého krychlového tělesa je zvolen jiný kolmý pohled, který budete vybírat.



Obrázek 20 -Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 c)

Vzorové řešení úlohy:

Uvedená úloha má ve všech svých podúlohách jednoznačná řešení. Tzn., každé zobrazené krychlové těleso je složeno z přesného konkrétního počtu jednotkových krychlí. Počty jednotkových krychlí, z nichž jsou příslušná krychlová tělesa sestavena, jsou zapsány na obr. 21 vpravo od obrázků příslušných krychlových těles zobrazených v rovnoběžném promítání. V každém řádku odpovídá právě jeden rovinný obrazec danému kolmému pohledu na příslušné krychlové těleso. Správné rovinné obrazce představující požadované kolmé pohledy na zobrazená krychlová tělesa jsou pro každou podúlohu této úlohy zakroužkovány na obr. 21.



Obrázek 21 - Návrhy úloh - krychlová tělesa - znázornění správného řešení úlohy 4.1 c)

Metodické pokyny:

Tato úloha se dělí na tři podúlohy, přitom pro každou podúlohu hledáme správná řešení pro dva na sobě nezávislé úkoly. Jedním úkolem je spočítání jednotkových krychlí, z nichž se skládají krychlová tělesa zadaná v jednotlivých podúlohách úlohy. Myslím si, že v každé podúloze je na první pohled jednoduché jednotkové krychle u jednotlivých zobrazených krychlových těles spočítat, žádné zobrazené krychlové těleso totiž není nijak složité. Všechny jednotkové krychle každého ze tří zadaných krychlových těles jsou v zobrazeném pohledu viditelné. Tato skutečnost se dá využít v další úrovni každé podúlohy. Druhým úkolem je volba rovinných obrazců znázorňujících zadané kolmé pohledy na jednotlivá zobrazená krychlová tělesa. Řešitelé si ovšem musí dát pozor, protože u každého zobrazeného krychlového tělesa, tj. v každé

podúloze je požadavek na jiný kolmý pohled. U krychlového tělesa hnědé barvy, tj. ve druhé podúloze jsem schválně v nabídkách řešení navrhla rovinné obrazce představující všechny tři možné kolmé úhly pohledů na toto krychlové těleso. Zde se může ukázat, jestli řešitelé poctivě a svědomitě čtou zadání každé podúlohy.

I tuto úlohu lze řešit různými metodami. Jednou z nich je „pouhé“ vytvoření představ jednotlivých zadaných krychlových těles. Řešitelé ve vytvořených představách nejprve určí počet jednotkových krychlí, ze kterých se příslušná krychlová tělesa skládají. Jednotlivá krychlová tělesa pak následně ve svých představách otáčejí do požadovaných poloh kolmých pohledů na ně a na základě takto vytvořených představ vybírají vždy právě jeden rovinný obrazec ze tří nabízených.

Další možnou metodou, kterou řešitelé mohou užít, je postavení reálného modelu krychlového tělesa z kostek stavebnice. Zde je podstatné, aby řešitelé použili ke stavbám jednotlivých krychlových těles shodné jednotkové krychle. Další fáze řešení úlohy se mohou různit. Řešitelé buď na obrázku znázorněného krychlového tělesa spočítají jednotkové krychle, ze kterých je krychlové těleso složeno, čímž určí řešení prvního úkolu a což jim pomůže ve vybrání potřebného počtu kostek ze stavebnice. Podle obrázku vytvoří reálný model příslušného krychlového tělesa. Na sestavený model se podívají kolmo v zadaném směru a následně pak na základě svého pozorování vyvodí, který ze tří zakreslených rovinných obrazců je ten správný.

Následující uvedenou metodu lze užít, je-li úloha naprogramována virtuálně. V tomto případě lze naprogramovat např. animaci otáčení krychlového tělesa zobrazeného v rovnoběžném promítání do různých úhlů pohledu. Řešitelé si tak mohou nastavit dané krychlové těleso v požadovaném kolmém směru. K vybrání správného rovinného obrazce je také důležité rozeznat jednotlivé zadané kolmé směry pohledu. Úlohu naprogramovanou v uvažované podobě by bylo možné zařadit také jako další možnou úlohu do interaktivní webové platformy Mathematikus.

Může se stát, že někteří řešitelé nevyužijí ani jednu ze tří výše zmíněných metod řešení úlohy, a to např. z toho důvodu, že nebudou chtít nad řešením úlohy přemýšlet. V takovém případě zvolí třeba metodu pokus – omyl. V této úloze může užití této metody spočívat např. v zakroužkování libovolného rovinného obrazce bez jakéhokoliv předešlého přemýšlení. Užití této metody tak nemusí dovést řešitele k nalezení správného řešení úlohy a není tedy vhodnou metodou řešení této úlohy.

Další varianty úlohy:

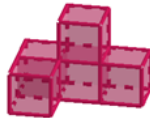
Náročnost této úlohy lze ztížit např. tím, že zadáme větší počet krychlových těles, k nimž se mají přiřazovat rovinné obrazce představující zadané kolmé pohledy.

Další možnou variantou je, že zadaná krychlová tělesa budou složitější, tj. budou složena z většího počtu jednotkových krychlí, případně v zobrazeném úhlu pohledu nebudou některé jednotkové krychle nacházející se v krychlovém tělese viditelné.

Jinou možnou obměnou úlohy je zobrazení zadaných krychlových těles v jiném zobrazení než v rovnoběžném promítání. Krychlová tělesa mohou být zadána např. pomocí kótového zápisu.

Další alternativou úlohy může být zakreslení většího počtu rovinných obrazců vedle obrázku krychlového tělesa zobrazeného v rovnoběžném promítání. Ze zakreslených obrazců se nebude vybírat pouze jeden rovinný obrazec, ale např. dva rovinné obrazce, z toho jeden z nich bude představovat kolmý pohled na příslušné krychlové těleso shora a druhý rovinný obrazec bude znázorňovat kolmý pohled na totéž krychlové těleso zepředu. Hledané kolmé pohledy mohou být při jejich označování rozlišeny např. různými použitými barvami, anebo odlišnými značkami.

Jinou možnou variantou úlohy a pro některé řešitele poměrně náročnou verzí je samostatné zakreslení správných kolmých pohledů na dané krychlové těleso, přitom obtížnost úlohy můžeme gradovat opět např. způsobem zadání krychlového tělesa (krychlové těleso je zakresleno v rovnoběžném promítání, je zadáno pomocí kótového zápisu atd.) (viz obr. 22). Pomůckou může být zakreslování rovinných obrazců představujících požadované kolmé pohledy na dané krychlové těleso na čtverečkovaný papír. I v této verzi úlohy je možné zobrazovat buď vždy jen jeden kolmý pohled na krychlové těleso, anebo dva různé kolmé pohledy na krychlové těleso či všechny tři kolmé pohledy (shora, zepředu a z boku) na dané krychlové těleso.

Krychlové stavby	Počet krychlí	Pohled zepředu	Pohled shora	Pohled z boku									
													
													
													
<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	1	1	1	1	1	1	1	1	0				
1	1	1											
1	1	1											
1	1	0											
<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>	4	4	2	3	2	1	1	0	0				
4	4	2											
3	2	1											
1	0	0											

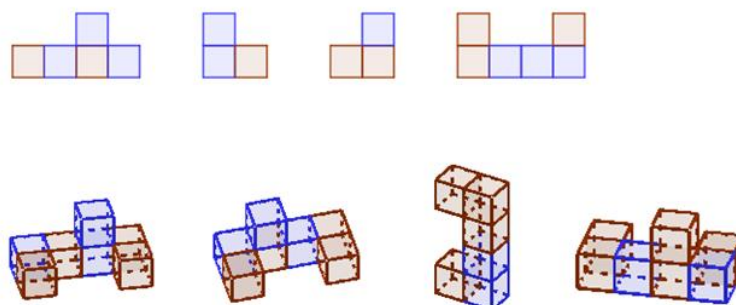
Obrázek 22 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 c) - další varianty úlohy

Ještě náročnější variantou může pro některé řešitele být obrácení úkolu úlohy, kdy podle zobrazených kolmých pohledů na krychlové těleso shora, zepředu a z boku mají sestavit model příslušného krychlového tělesa. Ten mohou buď postavit z kostek stavebnice, nebo mohou zkusit načrtnout jeho průmět např. v rovnoběžném promítání. Zmíněná náročnost zde spočívá v kombinaci tří kolmých pohledů, jejímž výsledkem je model pouze jednoho krychlového tělesa.

3.1.4 Úloha 4.1 d)

Zadání úlohy:

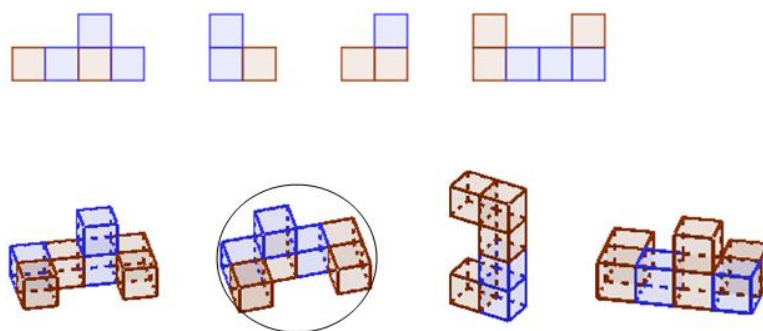
Na obr. 23 jsou znázorněny čtyři různé kolmé pohledy na jedno krychlové těleso. Ze čtyř zobrazených krychlových těles na obr. 23 určete to, které odpovídá všem čtyřem různým zobrazeným kolmým pohledům současně. Dávejte pozor i na barvy čtverců v zakreslených kolmých pohledech a na barvy stěn jim odpovídajících jednotkových krychlí v zobrazených krychlových tělesech.



Obrázek 23- Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 d)

Vzorové řešení úlohy:

Tato úloha má právě jedno správné řešení. Pouze zobrazené druhé krychlové těleso zleva (viz obr. 24) splňuje všechny dané podmínky úlohy, tj. odpovídá všem čtyřem daným kolmým pohledům současně.



Obrázek 24 - Náměty úloh - krychlová tělesa - vyznačení správného řešení úlohy 4.1 d)

Metodické pokyny:

Úkolem řešitelů v této je úloze zvolení takového krychlového tělesa, které současně odpovídá všem čtyřem zobrazeným kolmým pohledům. Řešitelé si musí ve svých představách poskládat celistvé krychlové těleso na základě čtyř zobrazených kolmých pohledů na něj. Po vytvoření si takového představy vyberou z nabízených

krychlových těles to správné. Důležité je, aby současně dbali i na správné zbarvení krychlí a jim odpovídajících čtverců v příslušných kolmých pohledech. Úloha se některým řešitelům může zdát těžší, ovšem pokud řešitelé zjistí hlavní principy postupu řešení této úlohy, mohou ihned vyřadit jedno nabízené krychlové těleso a následně budou vybírat pouze ze tří krychlových těles, u kterých je důležité si dát pozor na zbarvení jejich jednotkových krychlí. Je zde možnost zadat ze začátku lehčí varianty zadání, aby se řešitelé nejprve naučili hlavní princip postupu řešení této úlohy, a následně je pak možné ztěžovat obtížnosti zadání úlohy.

Tato úloha může být opět řešena různými metodami. Jednou z možných metod je vytvoření představ obrazů jednotlivých zadaných krychlových těles. Řešitelé pak obrazy krychlových těles otáčejí ve svých představách do všech čtyř poloh kolmých pohledů na ně. Porovnáním takto otočených obrazů krychlových těles s jednotlivými zakreslenými rovinnými obrazci a ještě i s přihlédnutím na barevnou shodu odpovídajících si stěn dvoubarevného krychlového tělesa se čtverci, z nichž se skládají rovinné obrazce, řešitelé rozhodnou, které ze zobrazených krychlových těles splňuje všechny podmínky úlohy.

Jinou metodou, která se k řešení této úlohy nabízí, je použití shodných kostek ze stavebnice a z nich postavení reálných modelů zobrazených krychlových těles. Zde je vhodné, aby byly ze stavebnice vybrány kostky pouze dvou barev. Přitom každá z těchto dvou barev bude odpovídat vždy jedné barvě na zobrazeném krychlovém tělese. Jsou-li modely krychlových těles z kostek ze stavebnice postaveny, řešitelé k nim mohou postupně přistupovat tak, aby se na ně dívali kolmo ze čtyř různých úhlů pohledu, které odpovídají zobrazeným pohledům, tj. kolmému pohledu zezadu a kolmým pohledům zleva, zprava a shora. Porovnáním skutečných kolmých pohledů na jednotlivé postavené modely krychlových těles se zadanými nakreslenými rovinnými obrazci řešitelé rozhodnou, které ze čtyř daných krychlových těles odpovídá všem čtyřem zakresleným kolmým pohledům současně.

Tato úloha je také vhodná k naprogramování pomocí virtuálních animací. Obrazy krychlových těles mohou být naprogramovány takovým způsobem, aby s nimi mohlo být libovolně otáčeno v prostoru a mohly být nastavovány do takových úhlů pohledu, že na ně může být nahlíženo kolmo v požadovaných směrech (v kolmém směru shora, zpředu nebo zezadu, zprava či zleva). Postupným porovnáním nastavených kolmých pohledů na krychlová tělesa (např. všechna krychlová tělesa jsou řešitelem nastavena do kolmého pohledu zpředu atd.) řešitel následně zjistí, které krychlové těleso

splňuje všechny zakreslené pohledy současně. Předpokládám, že takovéto naprogramování této úlohy je proveditelné a že by tedy úloha mohla být vhodnou úlohou k rozšíření platformy Mathematikus.

V případě, že řešitelé správně neporozumí úkolu úlohy, nebo že nebudou chtít nad řešením úlohy dostatečně přemýšlet, mohou zvolit metodu pokus – omyl. Tzn., zakroužkují jedno libovolně zvolené krychlové těleso ze čtyř zobrazených. Tato metoda ale nemusí vést k nalezení správného řešení úlohy a není tedy vhodnou metodou řešení této úlohy.

Další varianty úlohy:

I pro tuto úlohu je možné navrhnout další varianty. Obtížnost této úlohy lze zvýšit tak, že v zadání zobrazíme větší počet krychlových těles, k nimž se mají přiřazovat zobrazené rovinné obrazce představující zadané kolmé pohledy na jedno krychlové těleso. Tzn., mezi zobrazenými krychlovými tělesy bude jen jedno krychlové těleso, které odpovídá čtyřem zakresleným kolmým pohledům současně.

Jinou alternativou však může být ta situace, kdy mezi zobrazenými krychlovými tělesy budou alespoň dvě správná odpovídající krychlová tělesa. Ta budou zobrazena v jiném úhlu otočení či postavení. Zde řešitelé mohou, případně nemusí vědět, kolik správných krychlových těles v jednotlivých podúlohách hledají.

Další možnou variantou úlohy je, že zadaná krychlová tělesa budou složitější, tj. např. budou složena z většího počtu jednotkových krychlí, nebo v zobrazeném úhlu pohledu nebudou některé jednotkové krychle nacházející se v krychlovém tělese viditelné.

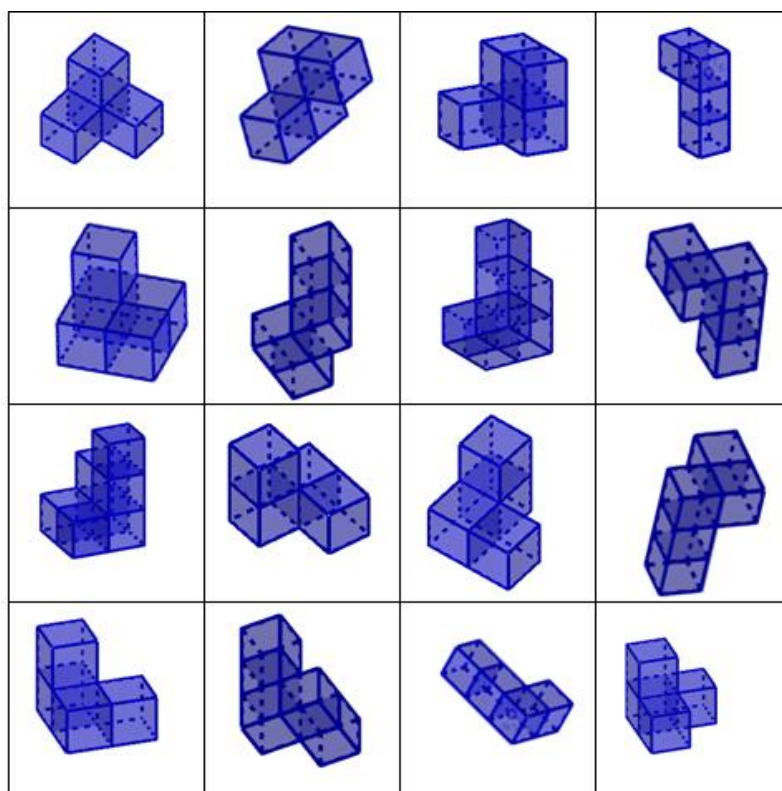
Jinou možnou obměnou úlohy je zobrazení zadaných krychlových těles v jiném zobrazení než v rovnoběžném promítání. Krychlová tělesa mohou být zadána např. pomocí kótového zápisu.

Obměnou úlohy, která může být pro některé řešitele poměrně náročná, je samostatné zakreslení průmětu krychlového tělesa (např. v rovnoběžném promítání), které odpovídá současně všem čtyřem zakresleným kolmým pohledům. Zde si řešitelé mohou pomoci např. postavením modelu z kostek stavebnice a takto postavený model poté zakreslí ve vybraném promítání do roviny.

3.1.5 Úloha 4.1 e)

Zadání úlohy:

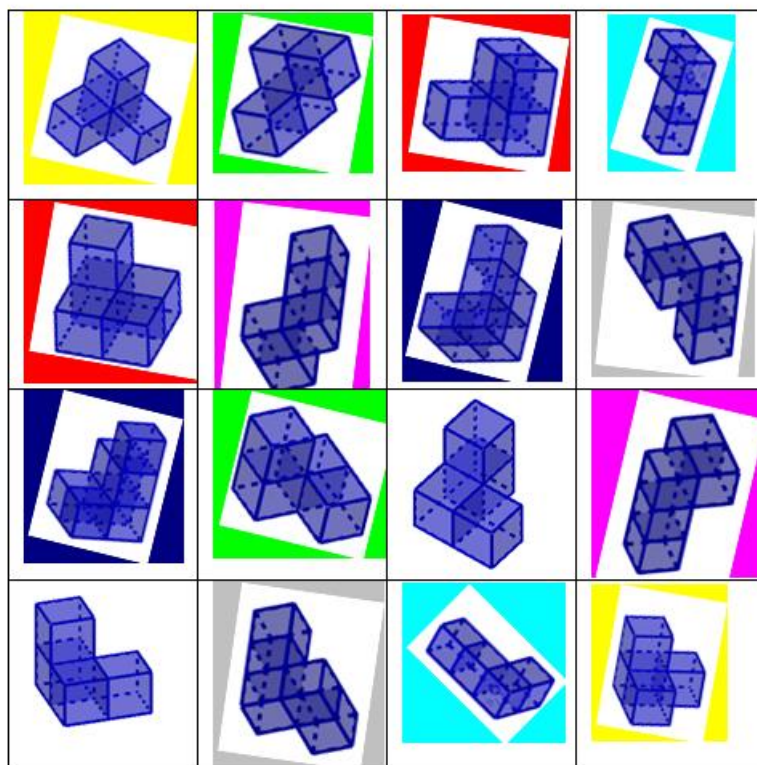
Znáte hru pexeso? Tato úloha je založena na velice podobném principu jako hra pexeso, ovšem zde nebudete otáčet kartičky. Vaším úkolem je vyhledat mezi zobrazenými krychlovými tělesy vždy dvě přímo shodná krychlová tělesa. Každou dvojici přímo shodných krychlových těles zakroužkujte jednou zvolenou barevnou pastelkou, tj. každou dvojici přímo shodných krychlových těles zakroužkujte jinou barvou.



Obrázek 25 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 e)

Vzorové řešení úlohy:

Tato úloha má jednoznačné řešení. V zobrazené tabulce je přesně osm dvojic přímo shodných krychlových těles. Každá přímo shodná dvojice krychlových těles je na obr. 26 podbarvena stejnou barvou.



Obrázek 26 - Náměty úloh - krychlová tělesa - vzorové řešení úlohy 4.1 e)

Metodické pokyny:

Tato úloha je částečně založena na principu hry pexeso. Hru pexeso zná skoro každý, díky tomu by téměř každý řešitel měl pochopit podstatu řešení této úlohy velice snadno. Tato úloha však může být pro řešitele obtížnější kvůli zobrazení většího počtu krychlových těles na jednom místě. Je třeba, aby si řešitelé zvolili správný systém a metodu řešení této úlohy, aby pro ně byl průběh řešení úlohy snazší a přehlednější. Úlohu lze využít i jako reálné pexeso, kdy vytištěnou tabulku se zobrazenými krychlovými tělesy rozstříháme na jednotlivé čtverce. Pexeso by se mohlo využít i jako aktivita pro rychlejší žáky.

I když hlavní princip řešení této úlohy spočívá v pravidlech známé hry pexeso, metody nalezení správných přímo shodných dvojic zobrazených krychlových těles mohou být různé. Jedna z metod se opírá o porovnání obrazů zobrazených krychlových těles v představách řešitelů. Některé zakreslené dvojice krychlových těles mohou řešitelé poznat bez nutnosti otočení obrazů krychlových těles v jejich představách, naopak jiné dvojice přímo shodných krychlových těles určí až na základě provedených mentálních rotací.

Pro některé řešitele může být vytváření si představ jednotlivých zobrazených krychlových těles a následně ještě jejich otáčení v představách dosti náročné. Uvedené skutečnosti mohou takovouto skupinu řešitelů vést k demotivaci řešení úlohy. Z tohoto důvodu je možné zvolit jinou metodu řešení, např. pomoci si postavením každého krychlového tělesa ze shodných kostek stavebnice. V uvedeném případě musí řešitelé nejprve využít své prostorové představivosti k přenesení dvourozměrného obrázku trojrozměrného objektu do reality. Řešení úlohy se pak již částečně přenesou na porovnání přímé shodnosti reálných modelů krychlových těles.

Pokud bude tabulka se zobrazenými krychlovými tělesy rozstříhána na jednotlivé čtverce, mohou řešitelé se vzniklými čtvercovými kartičkami různě otáčet, čímž se jim budou dvojice přímo shodných krychlových těles o trochu lépe určovat než v celé tabulce.

I tuto úlohu je možné zadat a řešit elektronicky pomocí virtuálních animací. Výhodné by bylo, kdyby bylo možné zobrazit jednotlivá zadaná krychlová tělesa do samostatných čtvercových okének, ve kterých by se krychlová tělesa mohla libovolně otáčet. Možnost otočení krychlových těles do různých úhlů pohledu by mohla řešitelům pomáhat s určováním správných dvojic přímo shodných krychlových těles. Pokud by bylo uvedené, anebo i jiné naprogramování této úlohy technicky proveditelné, mohla by být i tato navrhovaná úloha vhodnou úlohou k rozšíření platformy Mathematikus. Při řešení úlohy v interaktivní webové platformě Mathematikus by mohly dvojice správných přímo shodných krychlových těles postupně mizet, aby se řešitelé v úloze lépe orientovali a názorně viděli, které přímo shodné dvojice krychlových těles již zvolili správně.

Další varianty úlohy:

Pokusím se navrhnout další možné varianty i pro tuto úlohu. Tuto úlohu lze při rozstříhání tabulky se zobrazenými krychlovými tělesy hrát podle běžných pravidel hry pexeso. Tzn., jednotlivé čtvercové kartičky otočíme lícem dolů a postupným odkrýváním dvojic kartiček hledáme správné dvojice přímo shodných krychlových těles. Zpočátku lze zvolit zobrazení přímo shodných dvojic krychlových těles ve stejném úhlu pohledu, posléze pak zvýšíme obtížnost úlohy zobrazením krychlových těles v různých polohách, např. v těch, ve kterých jsou zobrazeny v zadání této úlohy. Náročnost zadání lze zvýšit také tím, že jedno krychlové těleso ve dvojici bude zobrazeno v rovnoběžném promítání a druhé bude zobrazeno např. pomocí

kótového zápisu (viz obr. 27), anebo obě dvě přímo shodná krychlová tělesa jsou znázorněna pomocí kótového zápisu. V prvním uvedeném případě by si řešitelé nejspíše měli jedno ze zobrazení příslušného krychlového tělesa převést ve druhé, a to např. ve svých představách.

<table><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	2	1	1	1			<table><tr><td>3</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	3	0	1	1				
2	1														
1	1														
3	0														
1	1														
<table><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	3	2	1	1	<table><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr></table>	1	1	2	0		<table><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr></table>	3	1	0	1
3	2														
1	1														
1	1														
2	0														
3	1														
0	1														
<table><tr><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	2	0	1	1		<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr></table>	1	3	0	0	<table><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	2	1	1	0
2	0														
1	1														
1	3														
0	0														
2	1														
1	0														

Obrázek 27 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 e) - další doplňující úloha

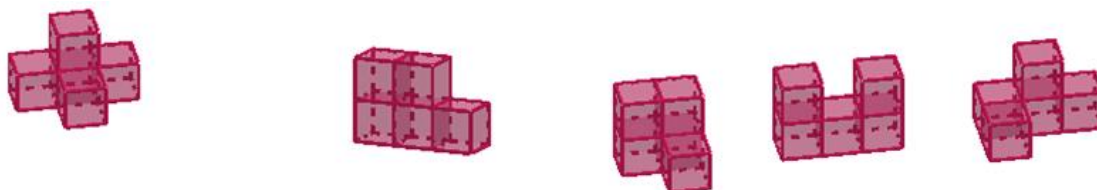
Zvýšit obtížnost úlohy lze i tak, že místo klasického pexesa vytvoříme tzv. pexetrio. Ke dvojicím přímo shodných krychlových těles zobrazených v rovnoběžném promítání přidáme ještě i třetí, s nimi přímo shodná krychlová tělesa, určená např. pomocí kótoových zápisů.

Při ponechání původního zadání zvýšíme úroveň obtížnosti úlohy zobrazením složitějších krychlových těles. Další variantou je i zvětšení počtu zadaných dvojic přímo shodných krychlových těles.

3.1.6 Úloha 4.1 f)

Zadání úlohy:

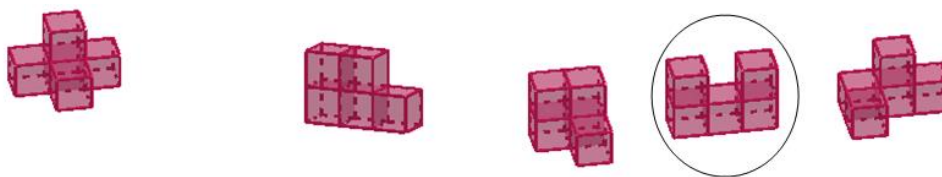
Na obr. 28 je vlevo zobrazeno krychlové těleso. Pokud jeho jednu jednotkovou krychli přemístíme, nemůže vzniknout některé krychlové těleso ze čtyř krychlových těles zobrazených vpravo. Které krychlové těleso nemůže vzniknout? Toto krychlové těleso zakroužkujte.



Obrázek 28 - Náměty úloh - krychlová tělesa - grafické zadání úlohy 4.1 f)

Vzorové řešení úlohy:

Všechna čtyři nabízená krychlová tělesa se skládají z pěti jednotkových krychlí, a tak zpočátku nelze ani jedno z nabízených krychlových těles ihned určit jako jedno z možných správných řešení. Pouze jedno ze čtyř nabízených krychlových těles splňuje podmínky zadání úlohy, je jím krychlové těleso zobrazené jako druhé zprava. Toto těleso bychom z krychlového tělesa zobrazeného vlevo získali přemístěním právě dvou jednotkových krychlí a ne pouze jedné jednotkové krychle, proto je toto krychlové těleso zobrazené jako druhé zprava správným řešením úlohy (viz obr. 29).



Obrázek 29 - Náměty úloh - krychlová tělesa - vzorové řešení úlohy 4.1 f)

Metodické pokyny:

Při řešení této úlohy je potřeba lépe rozvinutá prostorová představivost řešitelů. Řešitelé si totiž musí uvědomit, kterou jednu jednotkovou krychli je potřeba přemístit, aby vznikla možná krychlová tělesa. Ta však tentokrát nejsou správným řešením této úlohy.

Jednou z možných metod řešení této úlohy je přemísťování jednotkové krychle v představách řešitelů a také vytvoření si obrazů krychlových těles, které přemístěním jednotkové krychle následně vzniknou.

Slabším žákům je možné pomoci shodnými kostkami ze stavebnice, které mohou použít ať už pro vytvoření si lepších představ zobrazených krychlových těles, anebo i pro samotnou manipulaci v podobě přemísťování jednotkové krychle. Proto druhou z možných metod řešení této úlohy je stavba krychlových těles ze shodných kostek ze stavebnice a následná manipulace s jednou jednotkovou krychlí za účelem nalezení správného řešení úlohy.

Úlohu je ale také možné řešit pomocí náčrtků krychlových těles. Řešitelé mohou črtnat krychlová tělesa, která vznikají přemísťováním jedné jednotkové krychle daného krychlového tělesa znázorněného na obr. 28 vlevo. Tato metoda je náročnější, neboť mnoho řešitelů mívá problém se zobrazováním právě krychlových těles do dvourozměrné roviny.

Zkusila bych tuto úlohu zadat na hodině geometrie tak, že bych žákům poskytla jak možnost výběru užití shodných kostek ze stavebnice, tak i možnost zakreslování krychlových těles. Každý žák si tedy může zvolit metodu řešení úlohy, která mu bude lépe vyhovovat.

I tato úloha by mohla být zadána a následně řešena v elektronické verzi. Nabízí se zde tedy možnost vytvoření úlohy pomocí virtuálních animací a jejího případného vložení mezi úlohy, které se nacházejí ve webové interaktivní platformě Mathematikus. Zadané krychlové těleso zobrazené na obr. 28 vlevo by mohlo být složeno z jednotkových krychlí, se kterými je možné po nákresně pohybovat a přemísťovat je různě na sebe, vedle sebe, před sebe apod. Řešitelé pak mohou takto vytvořená krychlová tělesa porovnávat se čtyřmi zobrazenými nabízenými krychlovými tělesy, z nichž se má vybrat takové, které naopak nemůže vzniknout přemístěním právě jedné jednotkové krychle daného krychlového tělesa. Pokud bude možné danou úlohu popsáním, anebo jiným podobným způsobem naprogramovat, pak i tato úloha by mohla rozšířit úlohy umístěné v platformě Mathematikus.

Další varianty úlohy:

I pro tuto úlohu lze navrhnout další varianty. Jedním příkladem další varianty úlohy může být změna v počtu nabízených správných řešení úlohy, tzn., že mezi nabízenými krychlovými tělesy, z nichž mají řešitelé za úkol vybrat takové krychlové těleso, které není možné vytvořit z daného krychlového tělesa přemístěním právě jedné jednotkové krychle, budou např. alespoň dvě takováto krychlová tělesa. Zde lze obtížnost úlohy ovlivňovat třeba i tím, že řešitelé buď budou dopředu vědět, kolik takových krychlových těles hledají, anebo takovouto informaci dopředu vědět nebudou.

Další variantou je přemísťování jiného počtu jednotkových krychlí, např. právě dvou, alespoň dvou, nejvýše tří apod. V rámci řešení této varianty úlohy by studenti netrénovali pouze svou prostorovou představivost, ale také své znalosti z další oblasti matematiky, přesněji procvičovali by také využití všeobecných kvantifikátorů v rámci výrokové logiky.

Nabízí se ale také naopak možnost výběru právě všech těch krychlových těles, které mohou vzniknout přemístěním právě jedné jednotkové krychle daného krychlového tělesa.

Další alternativou je užití složitějších krychlových těles, případně vybírání krychlových těles, která odpovídají daným podmínkám úlohy, z většího počtu nabízených krychlových těles. Zadané krychlové těleso, jehož jednu jednotkovou krychli přemísťujeme, anebo i nabízená krychlová tělesa, z nichž vybíráme, mohou být zadány jiným způsobem, než že jsou zakresleny v rovnoběžném promítání. Mohou být znázorněny např. pomocí kótového zápisu. I tento námět můžeme považovat za další možnou variantu úlohy.

3.2 Úlohy pro téma „Síť krychle

Interaktivní webová platforma Mathematikus obsahuje pouze jeden typ úlohy procvičující téma síť krychle. Tento typ úlohy je zaměřen na sestavování různých tvarů sítí krychle, kterých je celkem jedenáct. Uživatelé platformy mají v uvedené úloze za úkol přiřazovat k bílému pravoúhelníkovému rovinnému obrazci skládajícímu se z pěti shodných bílých čtverců šestý modrý, s bílými dílčími čtverci shodný čtverec tak, aby po jeho přiložení vznikl jeden z možných tvarů sítí krychle.

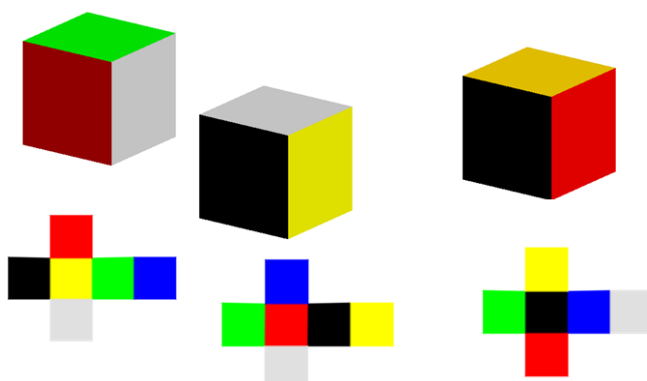
Příkladů k procvičování tématu síť krychle je celá řada. Dále zmíním alespoň některé z nich. Navrhované úlohy jsou přitom volené takovým způsobem, aby mohly být inspirací k doplnění již zmíněné úlohy uvedené v Mathematikusu. Je tedy zapotřebí, aby bylo při jejich sestavování myšleno také na to, zda je možné naprogramovat takové animační kroky, které by uživatelům Mathematikusu mohly pomoci se samotným procesem nalezení správného řešení úlohy, anebo s názorným zobrazením výsledného správného řešení úlohy.

3.2.1 Úloha 4.2 a)

Zadání úlohy:

Na obrázku (viz obr. 30) jsou znázorněny tři různě obarvené krychle a obrázky třech jim odpovídajících sítí. Jednotlivé obarvené krychle spojte s jimi odpovídajícími sítěmi.

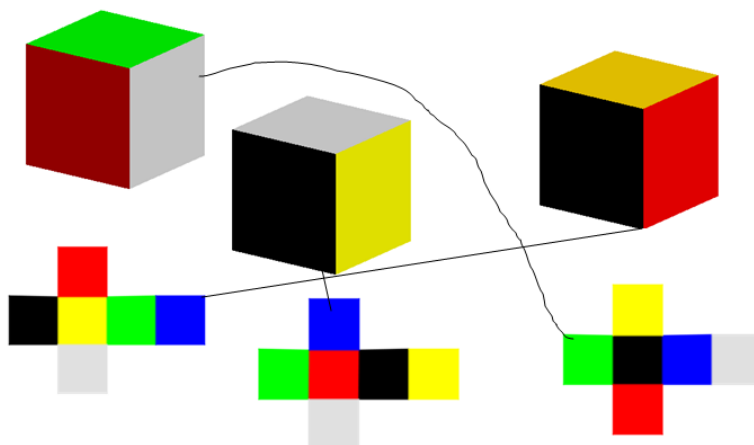
Poznámka: Barvy dílčích čtverců v daných sítích odpovídají barvám, kterými jsou obarveny jednotlivé stěny daných krychlí, ale délky stran dílčích čtverců jsou oproti délkám hran zobrazených krychlí zkráceny.



Obrázek 30 - Návrhy úloh - síť krychle - grafické zadání úlohy 4.2 a)

Vzorové řešení úlohy:

Při hledání správného řešení úlohy si řešitelé musí uvědomit, zda mohou být po složení jednotlivých sítí čtverce tří barev, které odpovídají barvám třech viditelně zobrazených sousedních stěn příslušné krychle, v takové poloze, aby shodně zbarvené zobrazené sousední stěny příslušné krychle vytvořily. Tato úloha má jednoznačné řešení, tj. řešitelé mohou spojit vždy právě jednu zobrazenou krychli s právě jednou jí příslušnou sítí krychle. Vzorové řešení úlohy je zakresleno na obr. 31.



Obrázek 31 - Návrhy úloh - síť krychle - vzorové řešení úlohy 4.2 a)

Metodické pokyny:

Pokud řešitelé nemají k dispozici žádné pomůcky, jsou při řešení této úlohy nuceni k vytváření si pouze názorných představ postupného skládání jednotlivých zadaných sítí v modely krychlí. Přitom je zapotřebí, aby si ve svých představách při postupném skládání sítí vytvářeli obrazy barevného rozvržení stěn na příslušných stěnách vznikajících modelů krychlí. Z nich pak následně vybrali odpovídající síť k příslušnému modelu krychle.

Potýkají-li se řešitelé s problémy vytváření si vhodných představ ať už samotných procesů skládání sítí v modely krychlí, anebo správného rozvržení barev na jednotlivých stěnách modelů krychlí, je možné jim nabídnout několik možností nápověd či pomoci, které vedou k různým metodám řešení úlohy.

Jednou možnou metodou, která souvisí s naprogramováním virtuálních animací, je možnost otáčení se zadanými modely krychlí po displeji obrazovky tak, aby se znázorňovaly při jednotlivých úhlech pohledu vždy alespoň tři sousední stěny daného modelu krychle. Řešitelé si v takovémto případě mohou uvědomovat,

zda mohou být barevné čtverce v příslušné síti buď sousedními či protějšími stěnami krychle.

Upřesňující náповědou mohou být též naprogramované animace, které složí jednotlivé zadané síť v modely krychlí, a s takto vytvořenými virtuálními modely krychlí bude možné následně také otáčet kolem jejich středů, aby mohly být řešiteli pozorovány z různých úhlů pohledů a porovnávány se zadanými modely krychlí. Správně vybraná síť k příslušnému modelu krychle může být pomocí virtuálně naprogramované animace např. složena, zbývající dvě neodpovídající síť krychle zůstanou naopak rozloženy. Uvedené způsoby virtuálních náповěd, resp. virtuálního zobrazení řešení považuji za vhodný námět k doplnění úlohy pro téma „Síť krychle“ v platformě Mathematikus.

Další možnou metodou, která sama o sobě vybízí k částečnému vytváření si představ procesu skládání zadaných sítí krychlí, je předložení reálných modelů krychlí, jejichž barevné rozvržení stěn odpovídá vždy jedné z daných zobrazených sítí. V tomto případě mají řešitelé možnost položit si jednu ze stěn reálného modelu krychle na jí odpovídající barevný čtverec sítí a zbývajících barevnými čtverci zobrazené síť pak ve svých představách mohou pokrývat příslušné stěny reálného modelu krychle. Následně pak rozhodnou, zda je či není možné příslušnou sítí vytvořit shodný reálný model krychle. Při této variantě metody řešení jsou řešitelé ušetřeni vytváření si představ modelů krychlí, ty vidí reálně očima před sebou.

Třetí metodou, která je vhodná především pro ty řešitele, kteří mají velmi nízkou úroveň prostorové představivosti, je vytvoření skutečných sítí krychle, které odpovídají svým tvarem i barevným rozmístěním dílčích čtverců zadaným sítím. K vytvoření takovýchto sítí lze s výhodou využít buď čtverečkovaný papír, anebo kreslicí čtvrtku. Řešitelé narýsované a vybarvené síť následně vystřihnou a složí v reálné modely krychlí. Ty pak otočí a umístí na podložku tak, aby odpovídaly daným zobrazeným modelům krychlí. Na základě porovnání reálných modelů a zobrazených modelů krychlí rozhodnou o přiřazení odpovídajících sítí k daným obrázkům modelů krychlí.

Další varianty úlohy:

Náročnost řešení této úlohy lze ztížit např. tak, že zadáme větší počet modelů zobrazených barevných krychlí a stejný počet jim odpovídajících barevných sítí téhož tvaru (např. pět zobrazených barevných modelů krychlí a pět jim odpovídajících barevných sítí téhož tvaru), anebo k zadaným modelům barevných krychlí

(např. ke třem) zvolíme větší počet zadaných barevných sítí (např. šest). Zde se nabízí různé možnosti řešení. Každému barevnému modelu krychle bude odpovídat nejvýše jedna zobrazená barevná síť, anebo každému barevnému modelu krychle budou odpovídat právě dvě zobrazené barevné sítě krychle, či každému barevnému modelu bude odpovídat alespoň jedna zobrazená barevná síť krychle. Můžeme ale zvolit také variantu, kdy některému ze zadaných modelů krychle nebude odpovídat žádná ze zobrazených barevných sítí krychle. Dále se nabízí otázka, zda řešitelům sdělíme, kolik odpovídajících sítí mají k příslušnému modelu krychle hledat.

Uvedené varianty úlohy netrénují pouze prostorovou představivost řešitelů, ale také propojení s matematickou logikou, přesněji procvičují užívání všeobecných slovních kvantifikátorů. Úlohu je možné zkomplikovat také tím, že řešitelům nabídneme místo jednoho stejného, nejčastěji užívaného a výše uvedeného tvaru sítě krychle (tj. síť krychle ve tvaru tzv. Latinského kříže) jiné stejné, anebo různé tvary sítí krychle v rámci jedné varianty úlohy. A při této obměně můžeme též aplikovat všechny výše uvedené alternativy úlohy.

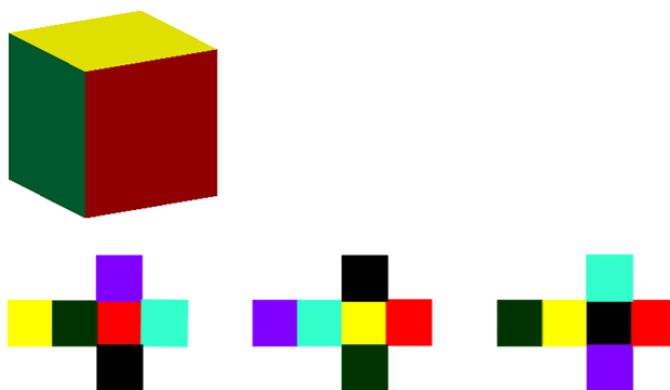
Úlohu je také možné vytvořit i pro další základní hranatá tělesa (kvádry, kolmé hranoly, jehlany). Pokud by tvůrci platformy Mathematikus využili této možnosti rozšíření, byli by nejspíše vedeni k vytvoření nového modulu s obecnějším názvem „Sítě (hranatých) těles“.

3.2.2 Úloha 4.2 b)

Zadání úlohy:

Na obr. 32 jsou znázorněny krychle, jejíž každá stěna je obarvena jinou barvou, a tři sítě s rozdílně rozmístěnými barevnými čtverci. Zakroužkujte tu síť, resp. ty sítě, ze kterých není možné danou krychli složit.

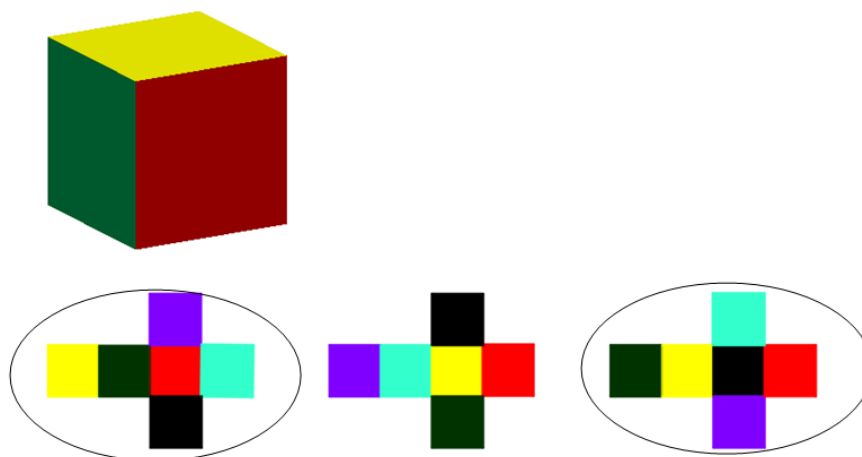
Poznámka: Barvy dílčích čtverců v daných sítích odpovídají barvám, kterými jsou obarveny jednotlivé stěny dané krychle, ale délky stran dílčích čtverců sítí jsou oproti délkám hran zobrazené krychle zkráceny.



Obrázek 32 - Náměty úloh - síť krychle - grafické zadání úlohy 4.2 b)

Vzorové řešení úlohy:

Podobně jako při hledání správného řešení úlohy 4.2 a) si řešitelé i v této úloze musí uvědomit, jestli může při skládání daných sítí nastat taková situace, při níž by se čtverce tří barev, které odpovídají barvám třech viditelných zobrazených sousedních stěn dané krychle, dostaly do takové polohy, aby byly odpovídajícími sousedními stěnami zobrazené krychle. Pokud by se takové rozmístění zbarvených čtverců v příslušné síti objevilo, pak tato síť není v této úloze správným řešením. Úkolem je totiž zakroužkovat právě ty dané sítě, z nichž danou krychli není možné složit. Tato úloha má dvě správná řešení, ta jsou zakroužkována na obr. 33.



Obrázek 33 - Náměty úloh - síť krychle - vzorové řešení úlohy 4.2 b)

Metodické pokyny:

Metody řešení této úlohy mohou být analogické s metodami řešení uvedenými u úlohy 4.2 a) s tím rozdílem, že v této úloze řešitelé nevybírají takovou síť, ze které je možné danou zobrazenou krychli složit, ale naopak tu, resp. ty, ze kterých danou

krychli složit nelze. Řešitelé si tedy musí řádně přečíst zadání úlohy, aby nezakroužkovali tu síť krychle, z níž lze danou krychli vytvořit. Zde se ukáže i jejich pozornost a svědomitost při čtení zadání úlohy.

Speciálně naprogramovaná virtuální animace pro tuto úlohu a následně umístěná do platformy Mathematikus by mohla být vytvořena např. takovým způsobem, aby se i nesprávně zvolené sítě zavřely do krychle a aby řešitelé mohli danými krychlemi, případně i krychlemi složenými ze sítí libovolně otáčet kolem jejich středů a následně porovnat chybná řešení s danou krychlí.

Ve třídě lze žákům povolit využití čtverečkovaného papíru, který jim může pomoci se správným rozhodnutím při volbě řešení. Samozřejmě ale jen v případě, pokud si správně překreslí a následně i správně složí dané vyobrazené sítě krychle.

Další varianty úlohy:

Možné varianty této úlohy spočívají ve vyšším počtu zadaných sítí krychle, ale i v různých počtech sítí, ze kterých není možné danou zobrazenou krychli vytvořit. Opět je možné úlohu zkomplikovat tím, že zadané barevné sítě krychle budou mít jiný, ale v rámci jedné podúlohy stejný tvar sítě krychle, než je ten, na který jsou řešitelé, resp. žáci nejčastěji zvyklí, tj. jiný tvar, než je tvar tzv. Latinského kříže. Obtížnost úlohy lze zvýšit také zadáním každého jiného tvaru barevné sítě krychle v rámci jedné podúlohy. V posledních dvou naposledy uvedených variantách úlohy je možné zadávat různé počty barevných sítí, z nichž řešitelé vybírají ty nesprávné, a řešitelé přitom dopředu buď mohou vědět, či na druhou stranu nemusí vědět, kolik nesprávných sítí mají v dané podúloze vybírat.

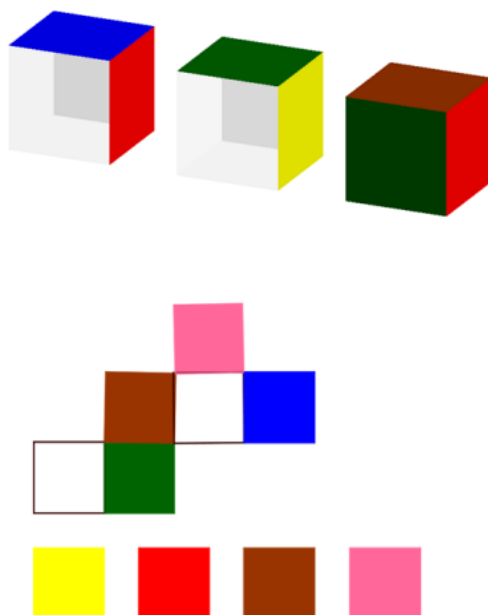
Dalšími alternativami úlohy jsou výměny krychle za jiná základní tělesa. Přitom je opět znovu možné různě kombinovat výše zmíněné varianty zadání úlohy.

3.2.3 Úloha 4.2 c)

Zadání úlohy:

Na obr. 34 jsou zobrazeny tři různé pohledy na jednu a tutéž krychli a dále je též znázorněna síť této krychle. Na dvou zobrazených pohledech na krychli nejsou vybarveny přední stěny a současně také chybí vybarvení dvou čtverců odpovídající síti. V dolní části obrázku se nacházejí čtyři barevné čtverce, které je potřeba doplnit na dvě neobarvené přední stěny pohledů na krychli a také na neobarvené čtverce v síti krychle. Barevné čtverce spoj s příslušnými místy tak, aby všechny tři pohledy na krychli i síť krychle tvořily jednu a tutéž barevnou krychli.

Poznámka: Délky stran dílčích čtverců sítě i barevných čtverců k doplnění jsou oproti délkám hran zobrazených pohledů na krychli zkráceny.

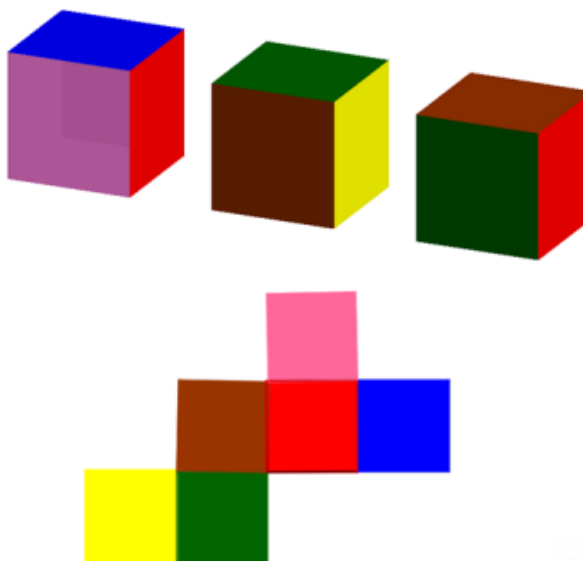


Obrázek 34 - Náměty úloh - síť krychle - grafické zadání úlohy 4.2 c)

Vzorové řešení úlohy:

Tato úloha je oproti předchozím dvěma uvedeným úlohám náročnější, a to v tom smyslu, že řešitelé musí při hledání správného řešení této úlohy „přecházet“ tam a zpět mezi rovinným zobrazením trojrozměrného objektu a pravoúhelníkovým rovinným obrazcem - sítí. Přitom musí brát v úvahu, že jedna a tatáž krychle je navíc zobrazena ve třech různých úhlech pohledu na ni. Řešitelé zde tedy hledají takovou vhodnou kombinaci umístění barevných čtverců

na požadovaná místa, která splňuje podmínky zadání úlohy. Existuje právě jedno správné umístění čtyř barevných čtverců na neobarvená místa, viz obr. 35.



Obrázek 35 - Náměty úloh - síť krychle - vzorové řešení úlohy 4.2 c)

Metodické pokyny:

Nemají-li řešitelé této úlohy k dispozici žádné pomůcky, ať už manuální či virtuální, jsou odkázáni na tvorbu vlastních představ. Tzn., musí si na základě tří rozdílných rovinných průmětů jedné a téže krychle a ještě k tomu na základě sítě této krychle představit, na kterých stěnách dané krychle jsou umístěné příslušné barvy. V důsledku toho pak doplní chybějící barvy na předdefinovaná neobarvená místa.

Z kreslicího kartonu je možné vyrobit papírový model krychle s odpovídajícími barevnými stěnami, s tímto modelem je poté možné různě otáčet a následně tak zjistit, které barvy budou na předních stěnách ve dvou zobrazených polohách dané krychle. Položením papírového modelu krychle jednou jeho barevnou stěnou na čtverec sítě stejné barvy lze za vytváření představ skládání dané sítě v model krychle vyvodit, které barvy je nutné doplnit na neobarvené čtverce sítě.

Druhou možností je vytvoření zadané sítě krychle a jejího následného složení v model krychle. Tento model lze otáčením nastavit do poloh, ve kterých je daná krychle v grafickém zadání úlohy zobrazena. Řešitelé tak mohou střídavě doplňovat barvy na přední stěny zobrazených průmětů krychle a na stěny modelu krychle, který nakonec rozložíme zpět v síť krychle.

Třetí možností je pak vytvoření jak modelu, tak i sítě krychle. Neobarvené stěny modelu krychle obarvíme pomocí jeho otáčení do zobrazených poloh krychle, případně ještě za pomoci složené sítě v model krychle. A naopak z již všech obarvených stěn modelu krychle doplníme chybějící barvy na ty stěny modelu krychle sestaveného ze sítě, které odpovídají nezbarveným čtvercům sítě. Oběma modely lze libovolně otáčet okolo jejich středů a umísťovat je do shodných poloh. Na závěr je možné jeden z modelů krychlí rozložit opět do původní zadané sítě a řešení doplnit např. do pracovního listu.

I pro tuto úlohu je možné naprogramovat virtuální animace, které mohou být různých typů. Prvně lze naprogramovat takové animace, pomocí nichž se přiřadí zadané barevné čtverce na předdefinovaná neobarvená místa. Dále lze vytvořit animace otáčení zadaných modelů krychlí. Při zanimování otáčení pouze modelu krychle zobrazeného vpravo je možné po jeho nastavení do poloh, ve kterých je umístěna krychle v prvním a druhém zobrazeném pohledu, porovnat odpovídající si barevné stěny a přiřadit pak správné barevné čtverce na neobarvené přední stěny prvního a druhého zobrazeného pohledu na krychli. Na druhou stranu je možné ponechat třetí zobrazený pohled na krychli jako statický a zanimovat první a druhý pohled na krychli. Oběma těmito zanimovanými pohledy bude možné otáčet a porovnávat umístění barev na jednotlivých stěnách krychle ať už mezi nima oběma navzájem, anebo se třetím zobrazeným pohledem či se zakreslenou sítí krychle.

Kromě možností zanimování zobrazených pohledů se nabízí i možnost zanimování znázorněné sítě krychle. Sít' tedy naprogramováním složíme a následný vytvořený model krychle pak otáčíme do jednotlivých poloh, ve kterých je v grafickém zadání úlohy zobrazena daná krychle. Opětovným porovnáním odpovídajících si barevných stěn přiřadíme zadané barevné čtverce na neobarvené stěny krychle, resp. čtverce sítě.

Některá či některé z popsaných virtuálních animací mohou být podkladem k vytvoření animovaného způsobu řešení úlohy. V takovém případě je pak možné takto naprogramovanou úlohu umístit do webové platformy Mathematikus.

Další varianty úlohy:

Pro tento typ úlohy je také možné vytvořit různé další varianty. Jednou z nich je znázornění jiného tvaru sítě krychle, než který byl použit v zadání úlohy 4.2 c). Druhou možnou obměnou úlohy je zakreslení rozličných pohledů na krychli (rozuměno např. zobrazení jedné a téže krychle v podhledu zleva, v nadhledu zprava a v podhledu zprava), další možnou variantou úlohy je přiřazení vícera barevných čtverců na odpovídající počet neobarvených míst.

Dalšími alternativami úlohy mohou být opět výměny krychle za jiná základní tělesa. Přitom je opět znovu možné různě kombinovat výše popsané varianty zadání úloh.

Gradace úloh je pro žáky důležitá, a proto jsem zařadila i tuto komplexnější úlohu. Při řešení této úlohy si totiž žáci musí být schopni uvědomit více aspektů najednou, tj. musí vědět, jak propojit dohromady tři různé pohledy na jednu a tutéž krychli, aby si vytvořili správnou představu obarvení jednotlivých stěn dané krychle a následně pak správně doplnili barvy, jak v síti, tak i na dvou průmětech krychle, na nichž jsou jejich přední stěny nevyplněny.

3.3 Úlohy zaměřující se na jiná tělesa

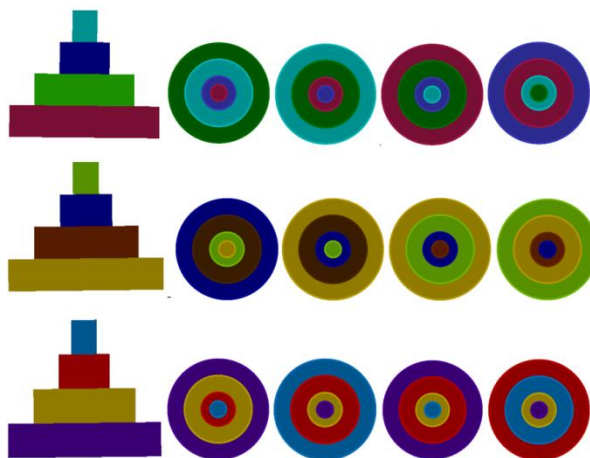
V interaktivní webové platformě Mathematikus jsou prozatím vloženy pouze úlohy, jejichž úkoly jsou zaměřeny na procvičování jednotlivých tvarů sítě krychle a především na procvičování mentálních manipulací s krychlí a krychlovými tělesy. Nabízí se ale i potřeba zadávat úlohy využívající k trénování prostorové představivosti jiné druhy základních těles. Následující navrhované úlohy jsou zaměřeny na procvičování prostorové představivosti právě s využitím dalších druhů základních těles.

3.3.1 Úloha 4.3 a)

Zadání úlohy:

Na obr. 36 jsou v levém sloupci zobrazeny kolmé pohledy zepředu na tři různé Hanojské věže. Každá Hanojská věž je sestavena ze čtyř odlišně barevných válců různých poloměrů, přitom válce jsou v Hanojských věžích položeny jeden na druhém a jsou umístěny dle velikostí jejich poloměrů vzestupně shora dolů. V každém řádku zakroužkujte obrazec, který odpovídá kolmému pohledu shora na Hanojskou věž, jejíž kolmý pohled zepředu je zobrazen v levém sloupci příslušného řádku (nebo ..., který

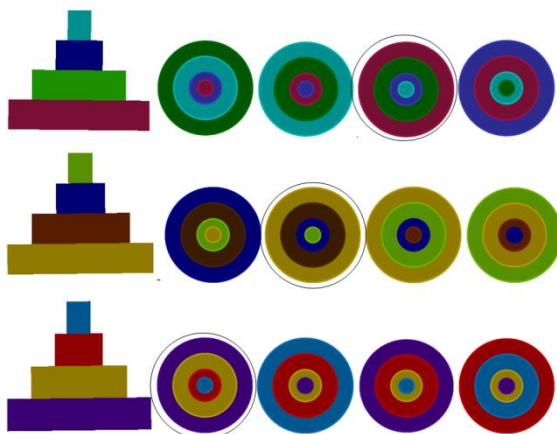
odpovídá půdorysu Hanojské věže, jejíž nárys je zobrazen v levém sloupci příslušného řádku). V každé podúloze je správným řešením právě jeden rovinný obrazec.



Obrázek 36 - Náměty úloh - Hanojské věže - grafické zadání úlohy 4.3 a)

Vzorové řešení úlohy:

Ve všech třech podúlohách jsou v rovinných obrazech představujících kolmé pohledy shora na Hanojské věže, jejichž kolmé pohledy zepředu jsou zobrazeny v příslušných řádcích v levém sloupci, zakresleny tři různě velká mezikruží a jeden kruh uprostřed nich. Tento počet odpovídá správnému řešení, proto nelze ihned na začátku vyloučit žádný z nabízených rovinných obrazců jako nesprávný. Při nalezení správného řešení je tedy třeba se zaměřit na barevné zobrazení rozměrově odpovídajících mezikruží a prostředního kruhu. Podle slovního zadání úlohy je v každém řádku správným řešením právě jeden rovinný obrazec. Vzorové řešení této úlohy je graficky vyznačeno na obr. 37.



Obrázek 37 - Náměty úloh - Hanojské věže - vzorové řešení úlohy 4.3 a)

Metodické pokyny:

Tuto úlohu lze opět řešit různými metodami. Při užití metody, která je založena pouze na využití prostorové představivosti a mentálních rotací v představách řešitelů, nejsou zapotřebí žádné speciální pomůcky. Řešitelé si ve svých představách postupně vytvářejí obrazy jednotlivých Hanojských věží a otáčejí je do kolmých pohledů zepředu a shora. Ty mezi sebou v představách navzájem porovnávají. Na základě těchto porovnání vybírají správné rovinné obrazce.

Další metoda už může být založena např. na využití reálných modelů. Hanojské věže je možné ve specializovaných obchodech zakoupit. Zde ale nemusí být dodržena barevná rozlišení dílčích válců, která jsou zakreslena v grafickém zadání úlohy. Nabízí se zde tedy i možnost výroby vlastních modelů ať už z papíru, či z jiných materiálů, anebo pomocí 3D tisku. Potom mohou řešitelé rozhodnout o volbě správného rovinného obrazce na základě skutečného pozorování 3D modelů.

I tato úloha by mohla být zpracována elektronicky, a tedy naprogramována pomocí virtuálních animací. Hanojské věže, jejichž kolmé pohledy zepředu jsou zobrazeny v příslušných řádcích v levém sloupci, mohou být naprogramovány takovým způsobem, aby s nimi bylo možné po nákresně otáčet v libovolných směrech. Řešitelé je tak mohou nastavit do kolmého pohledu shora a porovnat s nabízenými rovinnými obrazci. Takto naprogramovaná úloha by se též mohla stát součástí úloh zařazených v interaktivní webové platformě Mathematikus.

Další varianty úlohy:

I pro tuto úlohu je možné vymyslet další alternativy. Jednou z možných alternativ úlohy je změna v počtu správných řešení. Přitom řešitelům nebude v zadání úlohy výslovně řečeno, kolik správných řešení mají v jednotlivých podúlohách hledat.

Další obměnou může být zvýšení počtu nabízených rovinných obrazců, přitom správným řešením mohou být alespoň dva rovinné obrazce.

Jako jiná alternativa úlohy se nabízí zvýšení počtu válců o různě velkých poloměrech umístěných na jednotlivých Hanojských věžích. Úloha může být také zadána tak, že je zakreslený stejný počet kolmých pohledů zepředu a kolmých pohledů shora na příslušný počet Hanojských věží. Přitom vždy jednomu kolmému pohledu zepředu odpovídá vždy jeden kolmý pohled shora na příslušnou Hanojskou věž. Řešitelé při řešení této úlohy hledají sobě odpovídající kolmé pohledy na jednu a tutéž

Hanojskou věž. Úlohy tohoto typu jsou propedeutickými úlohami k zavedení jednoho ze základních principů Mongeova promítání.

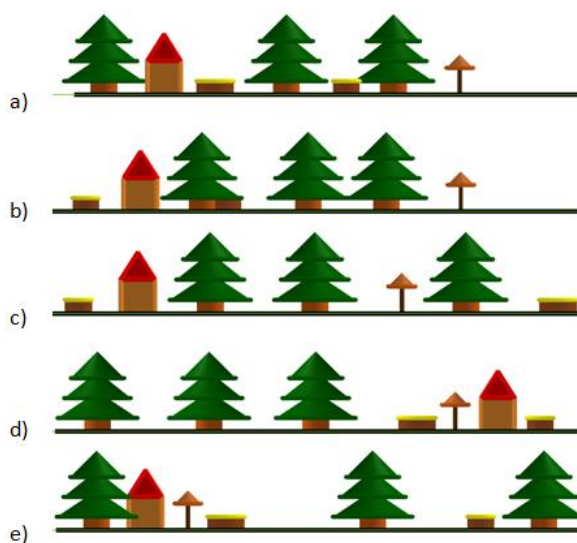
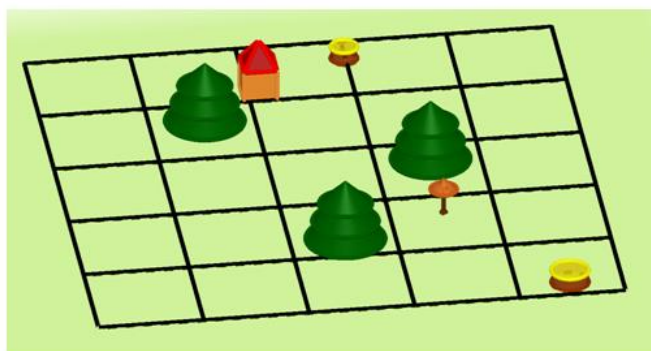
Náročnější verzí úlohy může být zakreslení správného kolmého pohledu shora na Hanojskou věž, která je zobrazena v kolmém pohledu zepředu, samotnými řešiteli. Tzn., řešitelé nemají možnost výběru z nabízených rovinných obrazců, rovinný obrazec musí zakreslit sami.

U všech výše uvedených úloh jsou navrženy některé příklady metod jejich řešení a také je ve stručnosti zmíněno několik jejich dalších možných variant. Předpokládám, že jsem ve svých návrzích nevyčerpala zdaleka všechny možnosti. Navrhované varianty některých výše uvedených úloh jsou obtížnostně složitější, protože je do budoucna počítáno také s tím, že úlohy zařazené v platformě Mathematikus nebudou určeny pouze jen pro žáky 1. stupně základní školy, ale i pro starší řešitele.

3.3.2 Úloha 4.3 b)

Zadání úlohy:

Na obr. 38 je v horní části vidět plánec okraje lesa v rovnoběžném pohledu. Plánek zachycuje rozmístění, kde se nachází dům, pařezy, přístřešek a stromy. Z níže uvedené nabídky vyberte odpovídající kolmý pohled na zakreslenou situaci. V úloze je právě jedno správné řešení.



Obrázek 38 - Náměty úloh - Plánek - grafické zadání úlohy 4.3 b)

Vzorové řešení úlohy:

Tato úloha má jednoznačné řešení, jak je přímo napovězeno ve slovním zadání úlohy. Správným řešením je volba kolmého pohledu zleva. Z jiného kolmého úhlu pohledu by muselo být výsledné řešení zakresleno s jiným uspořádáním objektů v obrázku. Správně zvoleným řešením je tedy pohled zobrazený pod písmenem c), na němž jsou pařezy jednoznačně umístěny na obou stranách plánu, což odpovídá rozmístění objektů v grafickém zadání úlohy.

Metodické pokyny:

I pro tuto úlohu lze k jejímu správnému řešení dojít více způsoby. Pokud využijeme způsob, který spočívá ve využití prostorové představivosti a je tedy opřen o řešení pouze v představách řešitelů, není potřeba poskytnout řešitelům žádné zvláštní pomůcky. Řešitelé postupně otáčejí plánek ve svých představách do jednotlivých kolmých pohledů, srovnávají tyto jednotlivé kolmé pohledy s obrázkem znázorňující rozmístění objektů v rovnoběžném nadhledu a tím zvolí správné řešení úlohy.

Další možností řešení této úlohy je využití předmětů, které budou představovat objekty znázorněné na plánku. Možné je, že nebudeme schopni žákům poskytnout přímo modely zobrazených objektů (dům, strom, pařez, přístřešek). Ovšem můžeme se žáky vymyslet, čím je nahradíme. Lze využít např. těles z hodin geometrie (dům – krychle, strom – válec apod.) či libovolně zvolené předměty. Případně vytvoříme např. papírové modely zobrazených objektů na plánku v rámci pracovních činností.

Pro tuto úlohu by bylo skvělou možností její naprogramování pomocí virtuálních animací. Celý plánek může být naprogramován takovým způsobem, kdy bude možné s celou nákresem včetně upevněných vyznačených objektů volně pohybovat. Řešitelům by tak bylo umožněno nastavení kolmého pohledu znázorněné situace ze všech různých stran, aby mohli porovnat nabízené kolmé pohledy s příslušným nastavením znázorněných prostorových objektů. V důsledku toho by i tato úloha mohla být zařazena mezi úlohy uvedené v interaktivní webové platformě Mathematikus.

Další varianty úlohy:

Pro tento typ úlohy je možné vymyslet další varianty úkolů, které by mohly vést k dalšímu zamyšlení žáků.

První alternativou úlohy může být, že se bude mezi nabízenými možnostmi vyskytovat více správných řešení úlohy. V tomto případě by byly zakresleny různé správné kolmé pohledy na prostorovou situaci. Žákům může, ale také nemusí být řečeno, kolik správných řešení je potřeba označit.

Další variantou je přidání více objektů na plánek. Ty se pak v kolmých pohledech mohou častěji překrývat. Náročnější obměnou je v řešeních úlohy zadat více podobných finálních pohledů, v nichž budou muset žáci hledat maličkosti, které budou specifikovat jednotlivé správné výsledky.

Dále je možné zadat úlohu tak, že žákům poskytneme plánek a všechny 4 možné kolmé pohledy, v nich ale některé objekty vyskytující se v plánu budou vynechané. Úkolem žáků bude doplnit vynechané chybějící objekty v daných kolmých pohledech.

Na druhou stranu je možné ale také žákům poskytnout prázdný plánec, kde oni sami budou muset zakreslit jednotlivé objekty nacházející se v příslušných daných kolmých pohledech zepředu, zezadu, zprava, zleva. Výsledným řešením bude finálně zobrazený plánec.

4 Pilotní testování

V této kapitole popíši přípravné aktivity, které předcházely vlastnímu ostrému testování uskutečněnému v rámci výzkumné části mé diplomové práce. Nejprve představím vybranou základní školu, dále ukážu pracovní list speciálně vytvořený k pilotnímu testování žáků a následně popíši výsledky pilotního testování. V další kapitole se budu věnovat jednomu z hlavních cílů mé diplomové práce, a to užití interaktivní webové platformy Mathematikus k rozvíjení a procvičování prostorové představivosti, v ní zhodnotím celý průběh ostrého testování a samotné spolupráce žáků.

4.1 Základní a Mateřská škola Březno

Ostré testování, které je základem výzkumné části diplomové práce, bylo uskutečněno na Základní a Mateřské škole Březno. Školu jsem si vybrala z několika důvodů, především kvůli tomu, že jsem v průběhu své školní docházky sama navštěvovala tuto základní školu a mám zde i nadále velice kladné vztahy jak s učiteli, tak i s vedením školy. Líbí se mi otevřenost vedení školy k mnoha různým projektům, ale i k realizaci mého testování žáků.

Základní a Mateřská škola Březno je školou nacházející se na vesnici, a tak se jedná o školu, kde se navzájem znají všichni žáci i učitelé. I když je Základní a Mateřská škola Březno „vesnickou“ školou, má kapacitu devíti tříd, přitom v každém ročníku jsou otevřené dvě třídy.

Cílem vedení, ale i učitelského sboru zmiňované základní školy je zajistit žákům kvalitní základoškolské vzdělání orientované na životní praxi a na další studium. Učitelé se snaží vést žáky k samostatnosti, přemýšlení, toleranci a tvořivosti. Vedení školy klade důraz na tvoření podmínek pro smysluplné využití volného času, neboť společně s učiteli zajišťuje pro své žáky mnoho zájmových a volnočasových aktivit.

4.2 Pracovní list s úlohami k pilotnímu testování

Po dohodě s vedením Základní a Mateřské školy Březno a s vyučující 5. ročníku jsem provedla pilotní testování žáků 5. ročníku, kteří by se měli následně zúčastnit ostrého testování.

Pilotní testování spočívalo v zadání dvojicím žáků vypracování čtyř speciálně sestavených úloh. Úlohy byly obsahově navrženy takovým způsobem, aby žáky

připravily na takové typy úloh, které se objevují v interaktivní webové platformě Mathematikus. Žáci zadání úloh obdrželi zapsané na pracovním listu. I když se jednalo o úlohy ze spontánní stereometrie, byly veškeré prostorové objekty zobrazeny pouze ve 2D nákresně, tj. v rovině papíru. Pro snazší porozumění principům řešení úloh bylo žákům umožněno použití reálných objektů – hrací kostky za účelem jejího postupného odvalování v úloze 1a a kostek stavebnice k postavení krychlových těles v úlohách 3 a 4. Ovšem i při možnosti použití reálných objektů bylo třeba, aby si žáci z dvourozměrných obrázků vytvořili správné představy trojrozměrných, např. krychlových těles a ty následně pomocí kostek stavebnice postavili.

Přestože hovořím o pilotním testování, nejednalo se o testování vědomostí žáků v pravém smyslu slova. Žáci mohli úlohy vypracovávat ve dvojicích. A kromě zjišťování správných odpovědí mě také zajímalo, zda vůbec žáci pochopili základní principy řešení jednotlivých úloh. Jednotlivé úlohy byly totiž vytvořeny na základě inspirace úlohami vyskytujícími se v interaktivní webové platformě Mathematikus, jejichž míra úspěšnosti řešení žáky je jedním z hlavních cílů ostrého testování jako výzkumné části této diplomové práce. Dalším hlavním cílem je zkoumání myšlenkových procesů, kterých žáci při řešení úloh využívali.

Navržené úlohy odpovídají tematicky i obsahově úlohám, které jsou probírány na 1. stupni základní školy, a tak jsem předpokládala, že by úlohy vybrané pro pilotní testování neměly žákům 5. ročníku činit potíže. Na obr. 39 - 41 jsou ukázány náhledy pracovního listu s navrženými úlohami k pilotnímu testování.

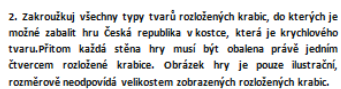
Pracovní list– prostorová představivost

1a) S využitím hrací kostky.

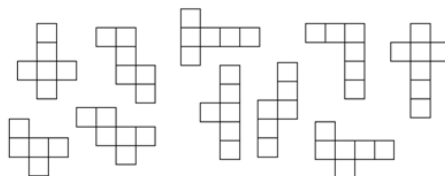
A diagram showing a 3D grid of cubes. The top-left cube contains six blue dots. Arrows indicate movement directions: right from the top-left cube, down from the middle-left cube, right from the bottom-left cube, up from the bottom-middle cube, and right from the bottom-right cube.

1b) Bez využití hrací kostky.

Obrázek 39 - Pracovní list, první strana - celkový vzhled



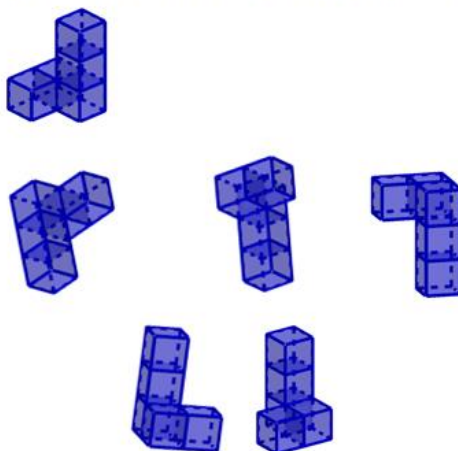
Vašeho řešení si tak ověřit.)



Obrázek 40 - Pracovní list, druhá strana - celkový vzhled

Jméno a příjmení: _____

4. Postavte krychlové těleso zobrazené vlevo nahoře dle předlohy a zkuste rozhodnout, která níže znázorněná krychlová tělesa jsou přímo shodná s předlohou, ta zakroužkujte.



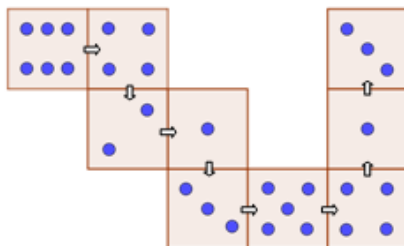
Obrázek 41 - Pracovní list, třetí strana - celkový vzhled

První testovou úlohou (viz obr. 39) je zaznamenání cesty odvalující se hrací kostky, kdy jsou na základě zobrazeného plánu dány směry jejího postupného odvalování a dále je dáno prvotní postavení hrací kostky. Je důležité dbát na doplňování správného směru zobrazovaných bodů (především pro hodnoty 2, 3 a 6 bodů). Žákům byla poskytnuta pro úlohu 1a) reálná hrací kostka, aby se lépe zorientovali a jednotlivá odvalování si lépe představili. Řešení úlohy 1b) žáci doplňovali bez využití hrací kostky, jak je napsáno v zadání úlohy. Na obrázku 42 jsou zobrazena správná řešení obou podúloh úlohy 1.

1. Doplní cestu odvalování hrací kostky. Odvaluj kostku dle plánu a do příslušných políček vyznačené cesty doplň body nacházející se v jednotlivých krocích odvalení na horní stěně kostky. Při doplňování dběj i na správnost směru zobrazovaných bodů. Jaký počet bodů bude zapsán v posledním políčku plánu odvalování?

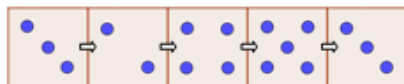
1a) S využitím hrací kostky.

Hrací kostka má vždy součet bodů na svých protilehlých stěnách roven sedmi. Na plánek cesty postavte hrací kostku na políčko se šesti body tak, aby na horní stěně kostky bylo 6 bodů, na přední stěně 5 bodů a na pravé stěně 3 body.



1b) Bez využití hrací kostky.

Hrací kostka má vždy součet bodů na svých protilehlých stěnách roven sedmi. Na plánek cesty si ve svých představách postavte hrací kostku na políčko se 3 body tak, aby na horní stěně kostky byly 3 body, na přední stěně 6 bodů a na levé stěně 2 body.



Obrázek 42 - Pracovní list, odvalování hrací kostky - správné řešení

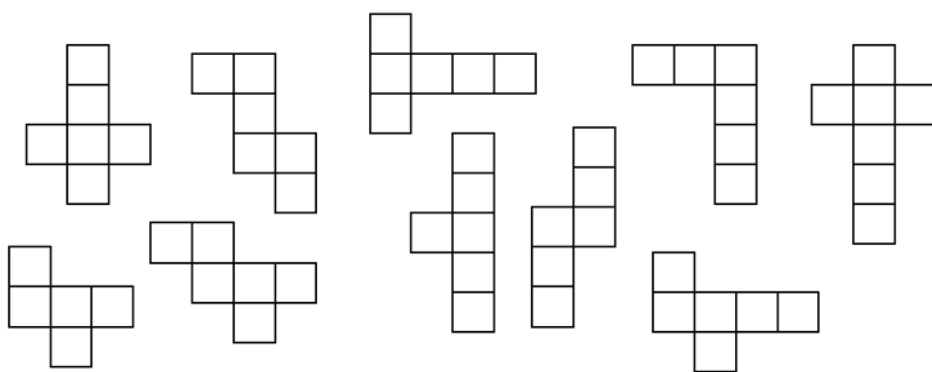
Ve druhé testové úloze je úkolem žáků zakroužkovat všechny typy tvarů rozložených krabic, do kterých je možné zabalit hru Česká republika v kostce (viz obr. 43). Hra je v krabici krychlového tvaru, tzn. žáci si musí uvědomit, že jde o klasickou krychli, pro niž je třeba vybrat a poté zakroužkovat správné sítě. Při řešení této úlohy měli žáci možnost se jít podívat na tvar hry Česká republika v kostce, protože jsem donesla reálné provedení této hry do třídy na příslušnou vyučovací hodinu, při níž vypracovávali testové úlohy v pracovním listu. Žáci měli také možnost použít čtverečkový papír, aby si mohli příslušnou síť představující rozloženou krabici vystříhnout a ověřit si tak správnost volby řešení. U dané úlohy bylo z deseti nabízených sítí krychle šest správných (viz obr. 44).



2. Zakroužkuj všechny typy tvarů rozložených krabic, do kterých je možné zabalit hru Česká republika v kostce, která je krychlového tvaru. Přitom každá stěna hry musí být obalena právě jedním čtvercem rozložené krabice. Obrázek hry je pouze ilustrační, rozměrově neodpovídá velikostem zobrazených rozložených krabic.

(Pokud si svou volbou nejste jistí, můžete si rozloženou krabici (ve zvoleném měřítku) vystříhnout ze čtverečkového papíru a správnost

Vašeho řešení si tak ověřit.)



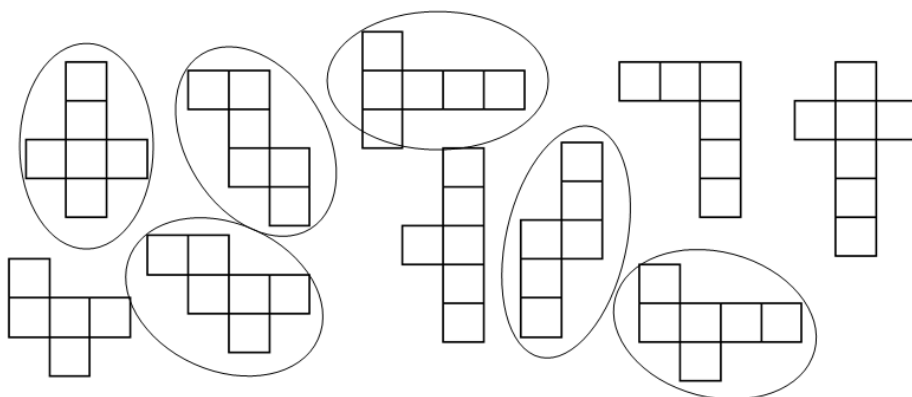
Obrázek 43 - Pracovní list, síť krychle - zadání



2. Zakroužkuj všechny typy tvarů rozložených krabic, do kterých je možné zabalit hru Česká republika v kostce, která je krychlového tvaru. Přitom každá stěna hry musí být obalena právě jedním čtvercem rozložené krabice. Obrázek hry je pouze ilustrační, rozměrově neodpovídá velikostem zobrazených rozložených krabic.

(Pokud si svou volbou nejste jistí, můžete si rozloženou krabici (ve zvoleném měřítku) vystříhnout ze čtverečkového papíru a správnost

Vašeho řešení si tak ověřit.)

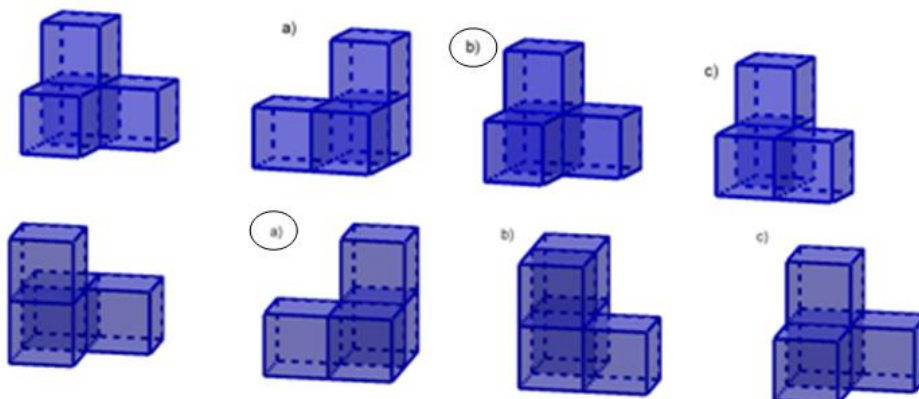


Obrázek 44 - Pracovní list, síť krychle - správné řešení

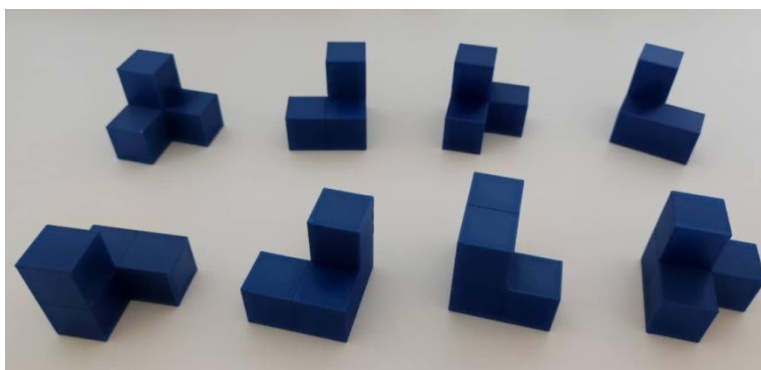
Ve třetí testové úloze žáci vybírali na každém řádku jedno správné řešení úlohy v podobě části krychlového tělesa, které doplní krychlové těleso zobrazené vlevo do celistvé krychle. Bylo potřeba, aby si žáci představili otočení nabízených

krychlových těles do správné polohy a jejich následné vhodné umístění na krychlové těleso zakreslené vlevo. Správná řešení obou podúloh jsou znázorněna na obr. 45. Pro tento typ úlohy byly vymodelovány reálné modely pro případné využití při vyplňování pracovního listu (viz obr. 46).

3. Vyberte z daných 3 krychlových těles a) – c) to, které spojením s původně daným krychlovým tělesem zobrazeným úplně vlevo na téže řádce vytvoří krychli. Krychlová tělesa se mohou různě otáčet.



Obrázek 45 - Pracovní list, celistvá krychle složená ze dvou krychlových těles - správné řešení

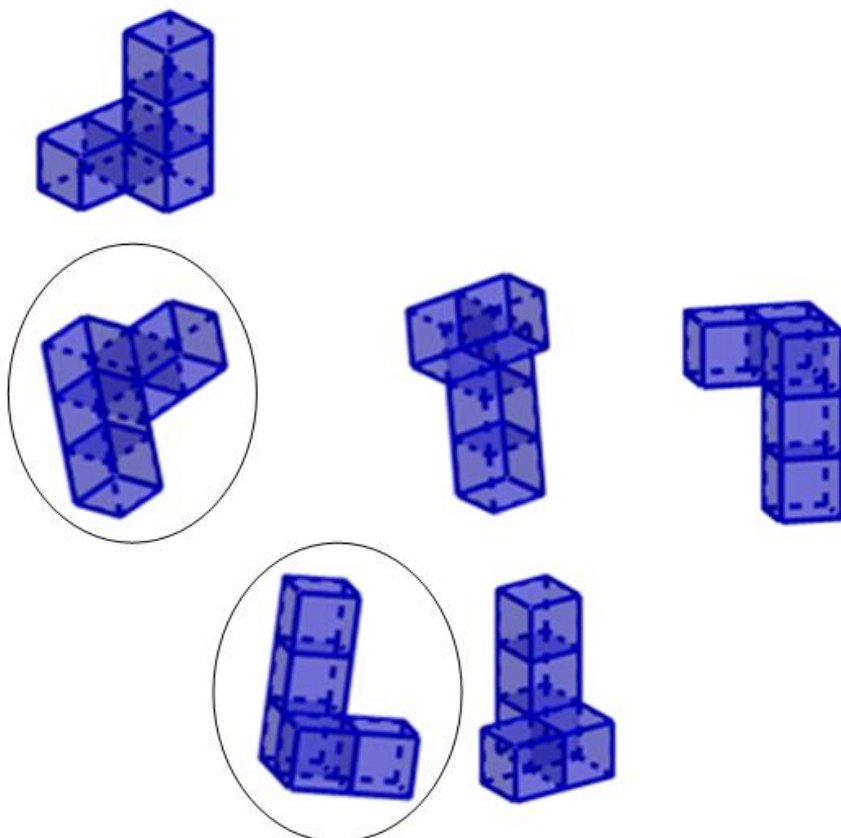


Obrázek 46 - Modely krychlových těles vytištěné na 3D tiskárně pro úlohu celistvá krychle složená ze dvou krychlových těles

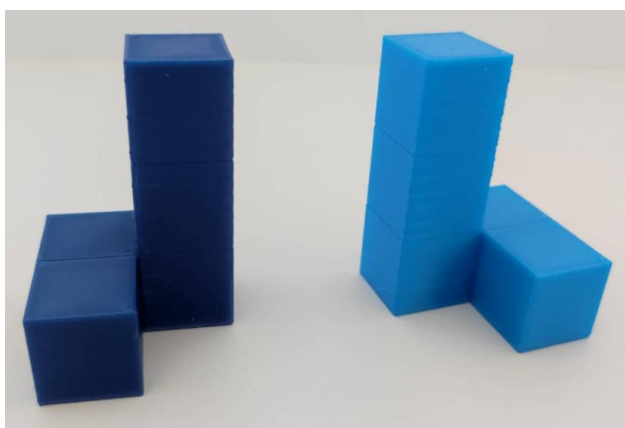
Poslední testovou úlohou zařazenou v pracovním listu je úloha spočívající ve výběru těch krychlových těles z dané nabídky, která jsou přímo shodná se zobrazeným krychlovým tělesem vlevo nahoře (viz obr. 47). I zde bylo důležité správné představení si a následné otočení krychlových těles v představách do odpovídající pozice, v jaké je znázorněno vzorové krychlové těleso vlevo nahoře. Pro tento úkol měli žáci k dispozici pěnové kostky, ze kterých si mohli postavit vzorové krychlové těleso a dle tohoto modelu mohli vybrat správné, resp. správná řešení

(viz obr. 47). Reálné modely těles byly vymodelovány i pro poslední úlohu, aby žáci mohli vidět dvě nepřímo shodná tělesa vedle sebe (viz obr. 48).

4. Postavte krychlové těleso zobrazené vlevo nahoře dle předlohy a zkuste rozhodnout, která níže znázorněná krychlová tělesa jsou přímo shodná s předlohou, ta zakroužkujte.



Obrázek 47 - Pracovní list, přímo shodná krychlová tělesa - správné řešení



Obrázek 48 - Modely krychlových těles vytištěné na 3D tiskárně pro úlohu přímo shodná krychlová tělesa

4.3 Průběh pilotního testování

Pro realizaci obou fází testování (pilotního i ostrého), uskutečněných na konci října 2021, jsem si zvolila již zmíněnou Základní a Mateřskou školu Březno, kde jsem také absolvovala většinu svých pedagogických praxí. Vzhledem k uvedeným skutečnostem i v souvislosti s možnými vládními opatřeními spojenými s pandemickou situací vzniklou v důsledku šíření onemocnění COVID-19 jsem testování uskutečnila začátkem školního roku 2021/2022, kdy byly školy otevřeny a žáci do nich docházeli prezenčně.

Úlohy z pilotního a ostrého testování spadají mezi úlohy spontánní stereometrie, která je průběžně probírána napříč ročníky 1. stupně základní školy. S ohledem na uvedené skutečnosti mi bylo s předstihem známo, do kterého ročníku zavítám. V Základní a Mateřské škole Březno jsou v 5. ročníku dvě třídy, po konzultaci s pedagogy mi bylo doporučeno provedení testování jen v jedné z nich.

V 5. třídě, která mi byla doporučena k testování, je celkem 19 žáků, z toho 5 dívek a 14 chlapců. Tato třída není nijak specializovaná. Žáky jsem rozdělila do dvojic s pomocí paní učitelky, která byla jejich třídní paní učitelkou od 1. do 3. ročníku a byla mi ochotna poradit, které dvojice žáků by se k sobě výkonnostně hodily nejvíce. V některých dvojicích byli spolu žáci stejného pohlaví a na velmi podobné inteligenční úrovni. I přes co nejzodpovědnější a nejrozsudnější rozdělení žáků vznikly u některých dvojic výraznější rozdíly v inteligenční úrovni a také ve stylu komunikace. Samotný průběh práce dvojic popíši v další části.

Celé testování trvalo 3 vyučovací hodiny. Nabízelo se rozumnější uskutečnit první část testování, tj. pilotní testování v podobě vyplňování pracovního listu se speciálně vytvořenými úlohami a jeho následné vyhodnocení v jeden den, a to ve dvou po sobě jdoucích vyučovacích hodinách, a druhou část testování provést další den během jedné vyučovací hodiny. O dva dny bylo cílem ostré testování týkající se zjišťování dovedností a schopností žáků řešit úlohy, které nabízí k procvičování prostorové představivosti webová platforma Mathematikus. Ostré testování bude popisováno v následující kapitole.

Časová dotace k vyplnění úloh v pracovním listu byla jedna vyučovací hodina, tj. 45 minut. Na začátku příslušné vyučovací hodiny byl žákům do dvojic rozdán pracovní list. Následně jsem společně s žáky zadání všech úloh z pracovního listu přečetla, aby věděli, jaké úlohy je čekají, a mohli se v případě nějakých nejasností

zeptat. Před započítím vyplňování řešení úloh jsme si stanovili pravidla, která budou během spolupráce ve dvojici platit, tj. každá dvojice pracuje sama, neopisuje od jiné dvojice, v případě nejasností se ptáme paní učitelky apod. Každá dvojice dostala povolené pomůcky (hrací kostku k vypracování úlohy 1a) a pěnové kostky) a mohla začít pracovat.

Během vypracovávání úloh v pracovním listu byli žáci pátého ročníku natáčeni na telefony či tablety žáky starších ročníků za účelem pořízení následného zdroje informací v podobě videonahrávek, jejichž opětovné přehrávání umožňuje zpětné vrácení se k určitému detailu. V rámci problematiky GDPR podepsal rodič každého žáka souhlas s pořízením fotografií a videozáznamu svého dítěte (viz příloha 1). V souhlasu je přislíbeno, že natočený materiál využiji pouze jako podpůrný materiál k vypracování mé diplomové práce a budu jej mít k dispozici já, resp. Mgr. Daniela Bímová, Ph.D., vedoucí mé diplomové práce. Videá ani fotografie nebudou nikde zveřejněna. Pořízené fotografie a natočený materiál smažu ihned, jakmile svou diplomovou práci úspěšně obhájím. Informace získané jak pilotním, tak i ostrým testováním budou zveřejněny anonymně. Někteří rodiče s nahráváním svých dětí bohužel nesouhlasili, a tak hodnotím výsledky řešení úloh pouze na základě odevzdaného pracovního listu, u těchto žáků nebudu hodnotit jejich práci v podobě řešení úloh v platformě Mathematikus.

Žáci měli dostatek času na vyhotovení řešení všech úloh v celém pracovním listu, a tak mohli ve dvojicích pracovat svou vlastní rychlostí. Nebyli nijak pobízeni k rychlejší práci, ani k unáhleným rozhodnutím. Po vypracování všech úloh v pracovním listu měli žáci bez jakékoliv možnosti dalšího vpisování či opravování svých uvedených řešení v pracovním listu k dispozici vzadu ve třídě na koberci všechny úlohy z pracovního listu a jejich veškerá správná řešení. Žáci si při kontrole správnosti řešení úloh nechávali pracovní listy u sebe, aby mohli porovnat svá řešení se správnými. Po provedení kontroly pracovní listy odevzdali.

Následující vyučovací hodinu jsme společně všechny úlohy z pracovního listu prošli, řekli, odůvodnili a ukázali jsme si pomocí různých pomůcek (hrací kostka, hra Česká republika v kostce, vystříhané síť krychle, pěnové kostky) všechna možná správná řešení úloh. Žáci poté věděli, jaká jsou správná řešení jednotlivých úloh a jak se především jednotlivé úlohy řeší. Odcházeli tak s určitou zpětnou vazbou. Na závěr vyučovací hodiny byla žákům představena interaktivní webová stránka Mathematikus za účelem jejich motivování pro další práci v následující den.

4.4 Vyhodnocení úloh z pilotního testování

V této podkapitole zhodnotím spolupráci žáků ve dvojicích a jejich řešení zadaných úloh. Aby byla během vyhodnocení uskutečněného testování zachována anonymita, bylo přiděleno každé dvojici žáků číslo. Jednotlivé úlohy jsem pro porovnání jejich úspěšnosti řešení žáky ohodnotila body (viz tabulka 1), tj. aby bylo přehledně vidět, při řešení jakých úloh se žákům dařilo, popř. ve kterých úlohách nebyli při řešení tolik úspěšní. Celkové hodnocení všech úloh nebylo nijak potřebné. Směrodatnější bylo na druhou stranu získané bodové ohodnocení jednotlivých úloh, které vypovídalo o tom, zda žáci pochopili podstatu a základní principy řešení příslušných úloh. Zajímavé bude následné porovnání výsledků získaných u příslušné dvojice žáků v pilotním testování s jejich vypracováváním úloh umístěných na interaktivní webové stránce Mathematikus. Získané výsledky byly pro mě též orientační k porovnání úspěšnosti řešení úloh jednotlivými dvojicemi žáků ve třídě (viz tabulka 2). Díky videonahrávkám si mohu zpětně pouštět záznam práce žáků ve dvojicích a následně vyhodnotit jejich komunikaci a spolupráci. Jejich stanoviska jsou také velice důležitou součástí jejich způsobů vypracování úloh z pracovního listu.

Tabulka 1 - Bodové ohodnocení jednotlivých úloh v pracovním listu

Bodové ohodnocení úloh	
1a)	8 bodů
1b)	4 body
2	6 bodů
3	2 body
4	2 body

Poznámka k tabulce 1

V úlohách 1a) a 1b) byl započtený 1 bod za každý správně zakreslený počet bodů včetně jejich správného směru. V případě, že dvojice žáků zakreslila správný počet bodů, ale volba směru byla nesprávná, bylo jim uděleno alespoň 0,5 bodu. V úloze 2 byl dvojici připsán bod za každou správně zakroužkovanou síť krychle. V úloze 3 byl připočtený bod za každou podúlohu v případě, že dvojice žáků zvolila správně z nabídky krychlových těles. Ve 4. úloze byl udělen bod za každé správně zakroužkované krychlové těleso přímo shodné s předlohou.

Tabulka 2- Bodové hodnocení úloh vypracovaných jednotlivými dvojicemi

Bodové hodnocení úloh vypracovaných jednotlivými dvojicemi						
Dvojice č./úloha	1a)	1b)	2	3	4	celkem
1 (chlapec – dívka)	8	2	4	2	2	18 bodů
2 (chlapec – chlapec)	0	1,5	1	2	2	6,5 bodů
3 (chlapec – dívka)	3	3	4	2	2	14 bodů
4 (chlapec – chlapec)	2	1	1	2	1	7 bodů
5 (dívka – dívka)	1	0	2	1	1	5 bodů
6 (chlapec – dívka)	8	1	6	1	1	17 bodů
7 (chlapec – chlapec)	8	2	2	0,5	1	13,5 bodů
8 (chlapec – chlapec)	8	2	2	2	2	16 bodů
9 (chlapec – chlapec)	4,5	3,5	2	1	2	13 bodů

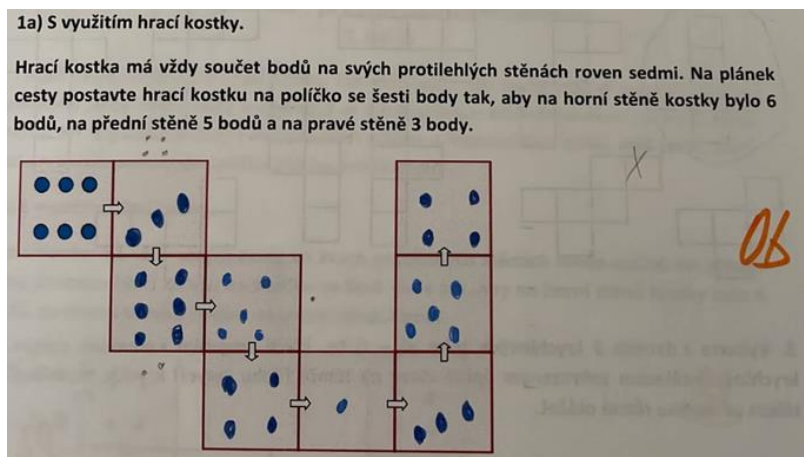
Nyní rozeberu a vyhodnotím každou úlohu zvlášť. U některých úloh podotknu, jaké měli žáci otázky či postřehy. Některých poznatků jsem si všimla již během opravování úloh, a to i bez přehrání jakékoliv videonahrávky. I tyto poznatky bych v této práci ráda poznamenala. U určitých úloh rozepíši práci každé dvojice, protože v nějakých případech se postup řešení úloh jednotlivými dvojicemi lišil. U úloh, u nichž bylo vidět jasné rozhodnutí a porozumění všemi dvojicemi, shrnu všechna povšimnutí do jednoho.

Po rozdělení pracovních listů a chvíle, kdy jsme si společně zadání jednotlivých úloh četli, neměli žáci žádné otázky a vypadali velice věrohodně, že všemu rozumí a ví, co mají dělat. Toto tvrzení musím vyvrátit hned poté, co žáci dostali svolení pro samostatnou práci ve dvojicích. Již tehdy se ukázalo, že některé dvojice nevěděly, co mají dělat. Přesvědčila jsem se o jejich nepozornosti, zdůraznila jim, ať si nezapomenou číst poctivě všechna zadání, a nechala jsem je pracovat.

4.4.1 Komentáře k řešení úlohy 1

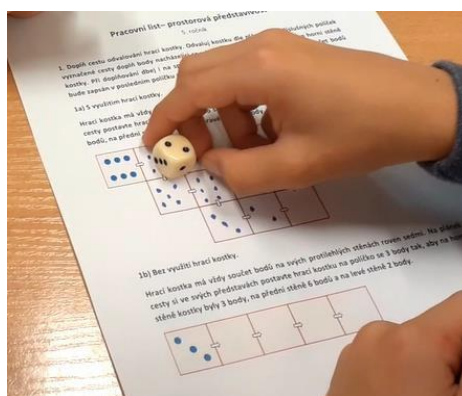
Během řešení první úlohy s pracovním názvem „Doplň cestu odvalování hrací kostky“ (viz obr. 39), přesněji během řešení její první části, tj. podúlohy 1a) měli žáci předepsanou možnost užití hrací kostky, kterou dostali k dispozici. V této podúloze se ukázaly dvě roviny uvažování žáků o principu řešení celé úlohy. První, tou nejlepší variantou bylo, když si žáci pečlivě přečetli zadání úlohy, na jeho základě správně postavili hrací kostku na plánek, otáčeli hrací kostku správnými směry dle šipek a postupně doplňovali správný počet zobrazovaných bodů, a to i ve správných směrech. U těchto dvojic můžeme vidět stoprocentní úspěšnost při řešení této podúlohy (viz tabulka 2). Bohužel, díky zbrklosti jistých dvojic, které si nepozorně přečetly, nebo

lépe řečeno, spíše nedočetly zadání této podúlohy, došlo k chybnému položení hrací kostky na první pole. Tyto dvojice vzaly pouze kostku, položily ji na první políčko plánu tak, aby bylo na horní stěně hrací kostky šest bodů, a začaly ji odvalovat. To vedlo k tomu, že jednotlivá políčka plánu nebyla těmito dvojicemi vyplněna správně (viz obr. 49).



Obrázek 49 - Žákovské chybné řešení podúlohy 1a)

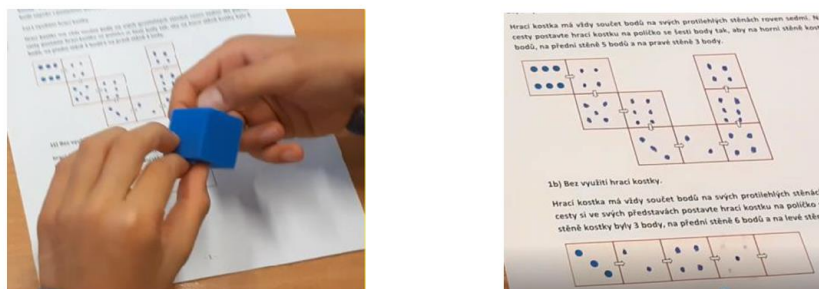
V tomto případě některé dvojice ani neodvalovaly hrací kostku správným směrem, a tak bylo zřejmé, že jejich řešení této podúlohy nemůže být zcela správně. I když u některých stěn hrací kostky doplnily směr zobrazovaných bodů správně, označila bych to spíše jako náhodu.



Obrázek 50 - Manipulace žáka s hrací kostkou při jejím postupném odvalování v podúloze 1a)

Podúloha 1b) (viz obr. 39) byla pro žáky obtížnější, a to z důvodu odevzdání hrací kostky paní učitelce po vyplnění podúlohy 1a). Všechny dvojice hrací kostku poctivě odevzdaly a snažily se vymyslet správné řešení bez jejího využití. Všechny dvojice, nezávisle na sobě, se snažily si poradit pomocí řešení podúlohy 1a), ale neuvědomily si, že hrací kostka v podúloze 1b) má jiné startovní postavení, a tak jim tato úvaha nikterak nepomohla, na což ony samy nepřišly a vyplňovaly řešení podúlohy 1b) chybně pomocí zakresleného řešení podúlohy 1a).

Pouze chlapec ze dvojice č. 3 (chlapec – dívka) si pomohl odvalováním krychle ze stavebnice, na které si prsty ukazoval počty bodů na jednotlivých stěnách. Udělal však chybu v tom, že na protilehlou stěnu se dvěma body umístil místo správných pěti bodů jeden bod. Na druhou stranu však nejprve bez užití pomocné kostky ze stavebnice vepsal na políčko po třetím odvalení hrací kostky správný počet pěti bodů (viz obr. 51).



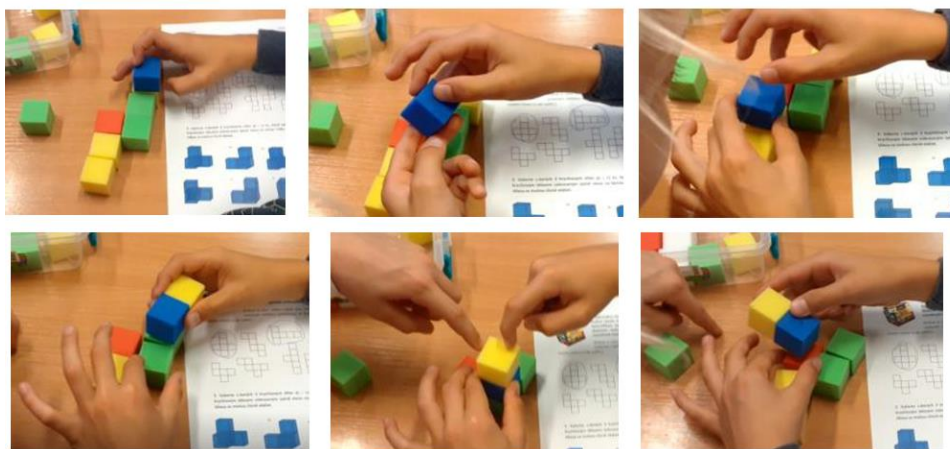
Obrázek 51 - Manipulace žáka s pěnovou kostkou, která nahrazovala hrací kostku; zápis řešení

Jak můžeme vidět v tabulce 2, žádná dvojice nedosáhla v této podúloze plného počtu bodů. Zde musím podotknout a především vyzdvihnout zamyšlení se některých žáků nad existencí pouze čtyř čísel v řadě kvůli tomu, že kostka má v jednom směru pouze čtyři stěny. V tuto chvíli vzali žáci na vědomí opakující se zobrazování bodů po příslušném počtu odvalení hrací kostky.

4.4.2 Komentáře k řešení úlohy 2

Úloha 2 se týkala zakroužkování všech správných tvarů rozložených krabic, do kterých je možné zabalit hru Česká republika v kostce, která je krychlového tvaru (viz obr. 40). Po celou dobu vypracovávání pracovního listu byla ve třídě před tabulí položená hra Česká republika v kostce, aby si ji žáci mohli prohlédnout a lépe představit. Viditelně této možnosti žádná dvojice nevyužila, ovšem věřím, že se na hru podívali z lavice a pouhý pohled jim pomohl. Skoro všechny dvojice si, ať už při prvotním pohledu na dvourozměrný obrázek hry, či v průběhu plnění úkolu

úlohy, spočítaly správný počet stěn krychle, což byl velice důležitý poznatek pro výběr správných sítí krychle. Jediná dvojice č. 6 (chlapec a dívka) mě poprosila o prvotní radu, kdy si nebyla jistá zadáním úlohy, a tak jsme si zadání úlohy znovu vysvětlili. Poté tato dvojice sama přišla na správný počet 6 stěn krychle pomocí počítání jednotlivých stěn na modelu krychle. Ovšem v tento okamžik jsem zjistila, že někteří žáci 5. třídy neznají pojem síť krychle. Nebylo potřeba znát přesné označení sítí krychle, ale myslím si, že žáci pátého ročníku by tento pojem znát už měli. Dvojice označená číslem 3 (chlapec – dívka) si pomohla pěnovou kostkou, kterou všechny dvojice měly k dispozici jako pomoc pro další úlohy. Víím, že to ničemu nevadilo, naopak jsem byla ráda, že si žáci v této dvojici dokázali najít vlastní pomůcku. Žák ze dvojice č. 3 má velmi obdivuhodnou úroveň prostorové představivosti, sám zvládl najít čtyři správná řešení této úlohy, a to pomocí odvalování kostky po sítích, které žáci této dvojice vytvořili z pěnových kostek. V některých případech ještě k aktuálně odvalené poloze kostky přiložil horní stěny kostek ze sítě tak, aby prsty označili, který čtverec sítě obalí jakou stěnu krychle (viz obr. 52).



Obrázek 52 - Jednotlivé kroky ověřování správnosti tvaru sítí krychle

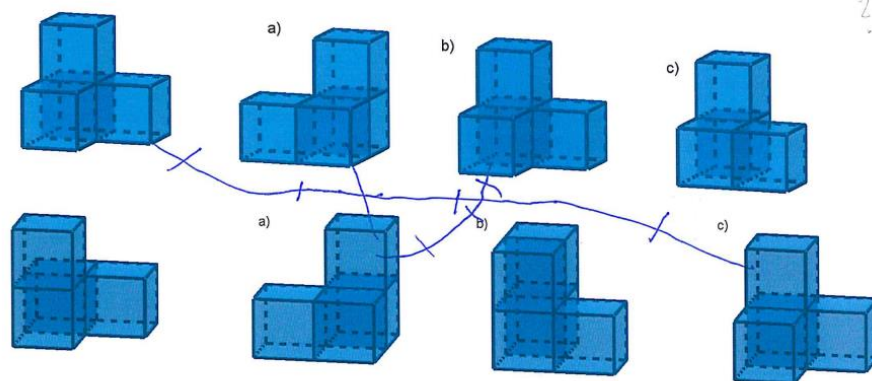
Při vypracovávání úlohy se mi líbila spolupráce dvojice žáků č. 1 (chlapec – dívka). Žáci v této dvojici si navzájem vysvětlovali, proč zvolené síť zakroužkují. Také díky postřehu, že krychle má 6 stěn, okamžitě vyloučili síť, které mají menší počet čtverců než 6. Dvojice žáků č. 4 (chlapec – chlapec) unáhnila své rozhodnutí a myslela si, že zadaná úloha má pouze jedno řešení. Po zakroužkování jedné sítě krychle přešli žáci této dvojice neprodleně k další úloze. Při zhlédnutí všech pracovních listů jsem si všimla, že žáci znají převážně síť krychle dvou typů, a to ve tvaru tzv. Latinského kříže a písmene „T“. Díky zakroužkování těchto dvou typů

sítí krychle dvojice žáků objevily alespoň dvě správná řešení a získaly bodové ohodnocení dvou bodů. Žádná dvojice nevyužila možnost použití poskytnutého čtverečkováného papíru k ověření správnosti zvoleného řešení.

4.4.3 Komentáře k řešení úlohy 3

Úloha 3, v níž bylo úkolem vytvořit celistvou krychli z daného krychlového tělesa a výběrem právě jednoho krychlového tělesa z předdefinované nabídky krychlových těles (viz obr. 40), byla pro některé dvojice obtížná. Při formátování pracovního listu jsem nerozdělila jednotlivé podúlohy úlohy 3 čarou, a tak se stalo, že jedna z dvojic - dvojice č. 7 (chlapec – chlapec) spojovala krychlová tělesa v rámci obou řádků, tj. v rámci dvou samostatných podúloh. Jedno ze dvou hledaných krychlových těles zvolili žáci této dvojice správně, ale v jiném řádku (viz obr. 53).

3. Vyberte z daných 3 krychlových těles a) – c) to, které spojením s původně daným krychlovým tělesem zobrazeným úplně vlevo na témže řádku vytvoří krychli. Krychlová tělesa se mohou různě otáčet.



Obrázek 53 - Pracovní list dvojice č. 7, úloha 3 - nepochopení zadání

Za jejich snahu jsem jim připsala alespoň 0,5 bodu z celkových 2 bodů. Tato dvojice navíc neznala pojem krychlové těleso. U této úlohy si některé dvojice pomáhaly pěnovými kostkami, ale ani v tomto případě pěnové kostky nebyly myšleny jako pomocný materiál. I tady jsem byla ráda, že si žáci uměli poradit a využili pěnové kostky k vytvoření si lepší představy zobrazených krychlových těles. U každé ze dvou podúloh si postavili zadané krychlové těleso a také všechna možná daná řešení. Dle svého uvážení zakroužkovali jedno správné řešení. Jedna dvojice dokonce použila postavená nabízená řešení, tj. krychlová tělesa k tomu, že je přiložila

ke vzorovému krychlovému tělesu tak, aby společně vytvořily požadovanou celistvou krychli (viz obr. 54).



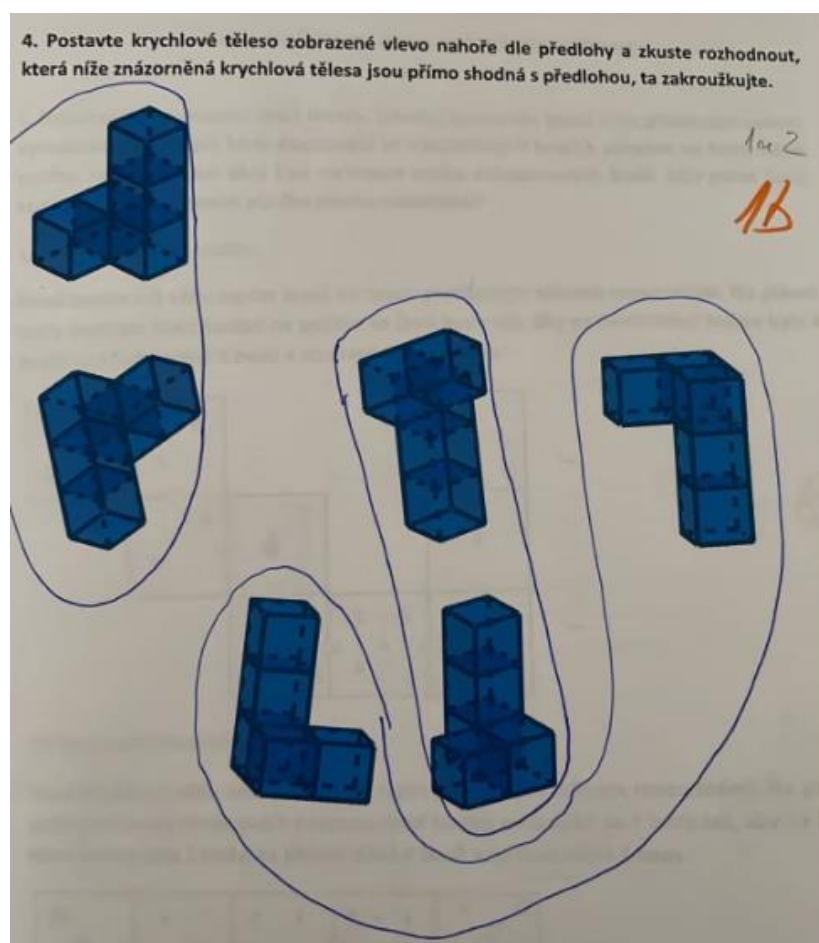
Obrázek 54 - Sestavování celistvé krychle z dílčích krychlových těles

Někdo zvolil strategii počítání dílčích krychlí v jednotlivých krychlových tělesech. Jedno nabízené krychlové těleso bylo možné vyloučit hned poté, co si jednotlivé jednotkové krychle v příslušném krychlovém tělese spočítali, což jim podstatně usnadnilo výběr správného řešení. Dvojice č. 6 (chlapec – dívka) asi zapomněla na druhou podúlohu úlohy, a tak označila krychlové těleso pouze v první podúloze. Při řešení této úlohy bylo názorně vidět, kteří žáci mají lépe rozvinutou prostorovou představivost a umí si vše snadněji znázornit pouze ve vlastní hlavě. Tito žáci okamžitě viděli správná řešení úlohy, aniž by se nad výběrem museli nějak více zamýšlet.

4.4.4 Komentáře k řešení úlohy 4

Poslední, čtvrté úlohy (viz obr. 41), v níž úkolem bylo představení si zobrazeného krychlového tělesa a následné zakroužkování mezi znázorněnými krychlovými tělesy takové krychlové těleso, které je přímo shodné s předlohou, tj. s daným krychlovým tělesem, se žáci zhostili s velikým obdivem dobře. Dvojice č. 1 (chlapec – dívka) si nejprve ukázala prstem na pracovním listu, které krychlové těleso je předloha, a následně si otáčela předlohu postavenou z pěnových kostek, aby zjistila, která ostatní krychlová tělesa jsou přímo shodná s předlohou. Dvojice č. 1 nakonec správně zakroužkovala obě dvě nabízené správné varianty řešení. Dvojice č. 2 (chlapec – chlapec) si po postavení předlohy z pěnových kostek otáčela papírem pro lepší představu, jak jednotlivá krychlová tělesa vypadají a zdali jsou přímo shodná s předlohou. I tato dvojice označila obě dvě správná nabízená řešení bez jakéhokoliv zaváhání. U dvojice č. 3 (**chlapec** – dívka) rozhodl o volbě řešení víceméně pouze jeden žák, který viděl řešení úlohy díky své skvělé úrovni prostorové představivosti. I tato dvojice měla úspěšnost při řešení této úlohy stoprocentní, žádnou pomůcku však k jeho určení nepotřebovala. Dvojice č. 4 (chlapec – chlapec)

si při hledání řešení prvně spočítala dílčí jednotkové krychle u jednotlivých krychlových těles. Když zjistila, že mají všechna krychlová tělesa stejný počet dílčích jednotkových krychlí, postavila si předlohu z pěnových kostek, díky které si vyvodila alespoň jedno správné řešení. Dvojice č. 5 (dívka – dívka) použila již všechny možné zmíněné postupy, tj. postavila si krychlové těleso dle předlohy, otáčela papírem pro vytvoření lepších představ krychlových těles, počítala dílčí jednotkové krychle, dokonce si i z pěnových kostek postavila nepřímě shodné stavby, aby viděla, že jsou odlišné. Ovšem i přes to všechno zakroužkovala dvojice č. 5 pouze jedno správné řešení. Dvojice č. 6 (chlapec – dívka) nevěděla, co je to předloha, což byl velký problém. Myslela si, že úloha má pouze jedno správné řešení, a řekla, že ostatní krychlová tělesa jsou stejná. Dvojice č. 7 (chlapec – chlapec) zřejmě nepochopila zadání úlohy, jak jsem vypožorovala z jejich řešení uvedeného v pracovním listu. Tato dvojice zakroužkovala vždy dvě krychlová tělesa k sobě (viz obr. 55). Domnívám se, že si tato dvojice ani nepřčetla zadání. Zřejmě náhodně zvolila jedno krychlové těleso správně.



Obrázek 55 - Pracovní list dvojice č. 7, úloha 4 - nepochopení zadání

U dvojice č. 8 (chlapec – chlapec) bylo ze zpětného přehrání videozáznamu její práce vidět, že jeden ze žáků vidí řešení úlohy díky své prostorové představivosti v momentě správně. Stejně jako předchozí dvojice si i tato dvojice správně postavila krychlové těleso z pěnových kostek, dle kterého řešení úlohy odvodila.



Obrázek 56 - Vyvození řešení úlohy 4 na základě postaveného modelu

4.5 Stručné shrnutí pilotního testování

Celkově musím podotknout, že spolupráce některých dvojic byla na velice dobré úrovni. Žáci mezi sebou komunikovali, snažili se v některých případech odůvodňovat si zvolená řešení a vysvětlovat svému spolužákovi svoji myšlenku, čímž procvičovali své argumentační dovednosti. Některé dvojice si již od prvního okamžiku četly pozorně zadání, a tak bez jakéhokoliv zaváhání věděly, co se po nich v úlohách chce. Dvojice č. 4 (chlapec – chlapec) si myslela, že u každé úlohy je možné pouze jedno správné řešení, což se projevilo v jejím celkovém hodnocení. Dvojice č. 7 (chlapec – chlapec) se obecně moc neorientovala v zadáních úloh, tj. nevěděla, co bylo v jednotlivých úlohách úkolem. Mezi dvojicemi se objevily i takové dvojice, ve kterých bylo celé řešení všech zadaných úloh prací pouze jednoho žáka, a jeho spolužák byl pouze přísedícím. Tato skutečnost mohla nastat díky dominantnosti jednoho z žáků anebo naopak díky pasivitě druhého žáka. Tyto skutečnosti je někdy obtížné předem odhadnout. Při vedení žáků ve třídě po celý školní rok, resp. školní roky po sobě budu jednotlivé žáky znát lépe, pak pro mě bude rozdělení žáků do dvojic snazší v tom smyslu, že lépe odhadnu jejich schopnosti a dovednosti v různých oblastech. Měla by se tím minimalizovat skutečnost, aby byl jeden z žáků ve dvojici dominantní a druhý naopak pouze jen pasivní, jak se k tomu u některých dvojic stalo při pilotním testování. Cílem je vždy takové rozdělení žáků do dvojic, aby v každé dvojici byli žáci přibližně na stejné dovednostní úrovni a s velmi podobnými schopnostmi a znalostmi.

Jak všichni víme, ne všichni žáci jsou všestranní, tzn. nalezneme žáky, kteří jsou v nějaké oblasti slabší, v jiné mohou být naopak zdatnější. Věřím, že každý

žák je šikovný v nějakém směru, cílem vzdělávacího procesu by mělo být rozvíjení potenciálu žáků v různých oborech a směrech.

5 Ostré testování

V této kapitole seznámím čtenáře s výsledky ostrého testování. Výsledky budou popsány slovně, a to opět formou případové studie.

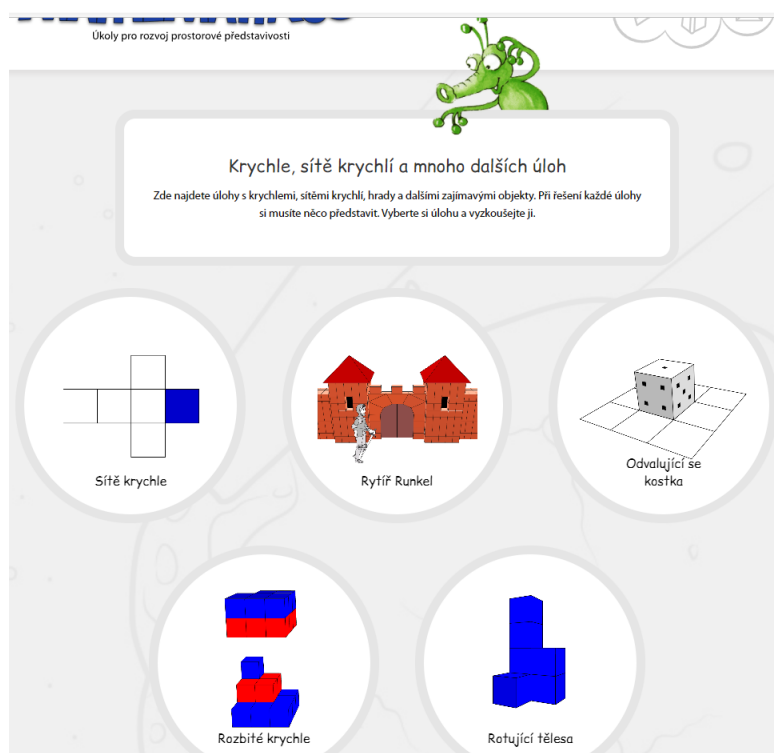
5.1 Realizace ostrého testování

Hlavním cílem ostrého testování bylo pozorování způsobů a jednotlivých kroků řešení úloh umístěných na interaktivní webové stránce Mathematikus žáky 5. ročníku 1. stupně ZŠ. Ostré testování bylo realizováno ihned druhý den po pilotním testování. Jednodenní pauza mezi jednotlivými fázemi testování neměla žádný hlubší význam ve smyslu vlivu na výkony testovaných žáků. Jen požadavkem paní třídní učitelky bylo, aby bylo testování prováděno během vyučovacích hodin matematiky, a dále bylo také potřeba, aby vyučovací hodinu, během níž mělo probíhat ostré testování, byla volná učebna s počítači. Pro ostré testování byla určena časová dotace 45 minut. Žáci pracovali během ostrého testování ve stejných dvojicích jako při pilotním testování. I během ostrého testování byli žáci nahráváni žáky vyššího ročníku, abych mohla následně vyhodnotit způsoby řešení zadaných úloh testovanými žáky, popsat jejich myšlenkové procesy, vzájemnou komunikaci apod. Cílem ostrého testování nebylo bezchybné vyřešení všech zadaných úloh, ale zjištění, jakými různými způsoby, cestami a přístupy jsou schopni žáci 5. ročníku řešit vybrané úlohy ze spontánní stereometrie.

Samotný průběh ostrého testování byl organizačně jednodušší. Zadávané úlohy byly již umístěny ve webové platformě Mathematikus, žáci pracovali pouze s počítačem, žádné další pomůcky k řešení úloh jim nebyly povoleny a navíc způsob naprogramování úloh poskytoval žákům okamžitou zpětnou vazbu, a to buď pomocí virtuálních animací, anebo pomocí slovních komentářů.

Ještě před začátkem vyučovací hodiny jsem se s žáky přesunula do počítačové učebny, aby měli dostatek času, resp. celou vyučovací hodinu na plnění úloh. Žáci, kteří spolu tvořili dvojici, seděli u jednoho počítače. Dvojice žáků jsem v učebně rozmístila tak, aby mezi každou dvojicí byl jeden počítač volný, a to z těch důvodů, aby se jednotlivé dvojice navzájem nerušily a aby bylo z videonahrávky vidět, na čem jednotlivé dvojice žáků spolupracují, a především lépe slyšet, jak u činností komunikují. Když měla každá dvojice zapnutý svůj počítač, společně jsme ve webovém prohlížeči vyhledali webovou platformu Mathematikus. Žáky jsem nechala otevřít

modul s názvem „Krychle, síť krychlí a mnoho dalších úloh“, kde je pět různých typů úloh k vypracování (viz obr. 57). Žákům jsem dala za úkol vypracovat všech 5 typů úloh včetně všech jejich podúloh. Dále nebylo potřeba nic víc vysvětlovat, protože zadání jednotlivých úloh ukazovala příšerka Pí, a tak žáci mohli začít okamžitě pracovat. Samozřejmostí byla možnost zeptání se na dotazy či prosba o pomoc nebo vysvětlení při jakékoliv nejasnosti v průběhu řešení úloh. Při následném odpovídání na dotazy žáků jsem se snažila neovlivnit žádným způsobem jejich postupy řešení, myšlenkové procesy apod.



Obrázek 57 - Webová stránka Mathematikus - modul „Krychle, síť krychlí a mnoho dalších úloh“

Během práce na počítači se dvojice žáků potýkaly spíše jen s technickými problémy, tj. dotazovaly se na nezřetelnosti týkající se přechodu na další úlohy, práce se zaškrtávkem či nezřetelnosti spojené s možnostmi otočení krychlových těles. V případě, kdy žáci měli již vypracované všechny úlohy v modulu „Krychle, síť krychlí a mnoho dalších úloh“ v platformě Mathematikus, mohli si projít další část platformy s názvem „Stavění a skládání“ či si zopakovat úlohy, které řešili doposud, a hledat případná jiná řešení, protože u některých úloh je možných více správných řešení.

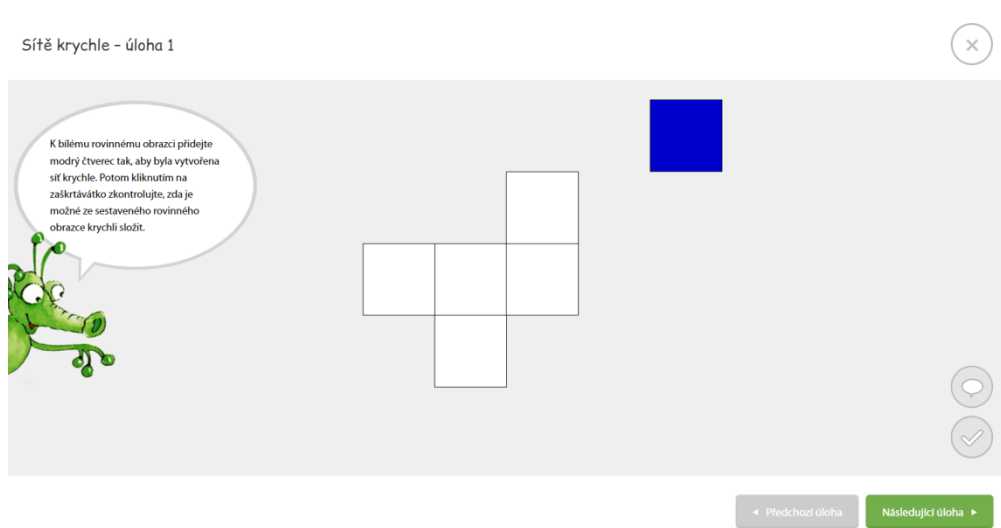
Po ukončení práce všech dvojic nebylo potřeba se zabírat řešeními jednotlivých úloh a podúloh, protože zpětná vazba byla žákům poskytnuta vždy automaticky po zvolení řešení příslušných podúloh. Jediné, co bylo vhodné zjistit, bylo zeptat se žáků, zda někdo z nich přišel na to, že některé, případně které úlohy mají více možných správných odpovědí.

Na závěr jsme s žáky zhodnotili práci v platformě Mathematikus a jejich celkový dojem z pilotního a ostrého testování, čemuž se budu věnovat v následující kapitole.

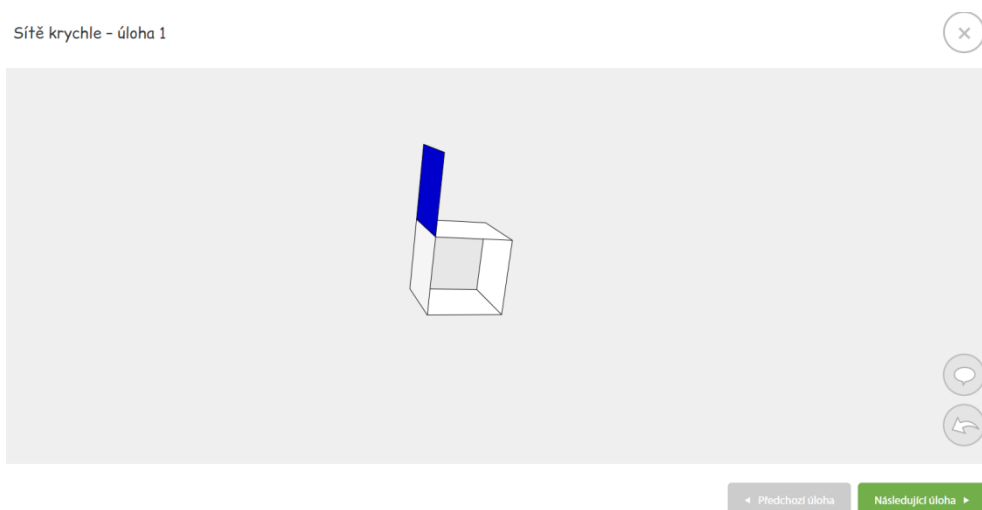
5.2 Úlohy modulu „Krychle, sítě krychlí a mnoho dalších úloh“

Některé úlohy tohoto modulu jsem již popisovala v podkapitole 2.3. Úlohy, které byly již představeny detailněji, budu dále zmiňovat jen okrajově. Naopak ty úlohy, o kterých jsem se výše jen zmínila, budu charakterizovat podrobněji.

V první úloze pojmenované „Sítě krychle“ (viz obr. 58) mají žáci za úkol přidat modrý čtverec k bílému rovinnému obrazci tak, aby vznikla síť krychle. V každé podúloze existuje více možných správných řešení. Po správném přiřazení modrého čtverce k bílému rovinnému obrazci se při kliknutí na zaškrtávacíko zabalí celá síť do celistvé krychle. Pokud žáci přiřadí modrý čtverec na nevhodné místo k obvodu bílého rovinného obrazce, vytvořený rovinný obrazec se v nějakých případech nezabalí do krychle vůbec, nebo se zabalí tak, aby bylo názorně vidět, že přidaný modrý čtverec je k bílému rovinnému obrazci nesprávně umístěný. V takovém případě nemusí být některá ze stěn krychle rovinným obrazcem pokryta vůbec a současně na druhou stranu jeden z dílčích čtverců rovinného obrazce může přesahovat mimo povrch krychle (viz obr. 59). Není-li některá ze stěn krychle pokryta, může to znamenat také to, že na jedné její stěně se mohou překrývat dva různé dílčí čtverce rovinného obrazce.

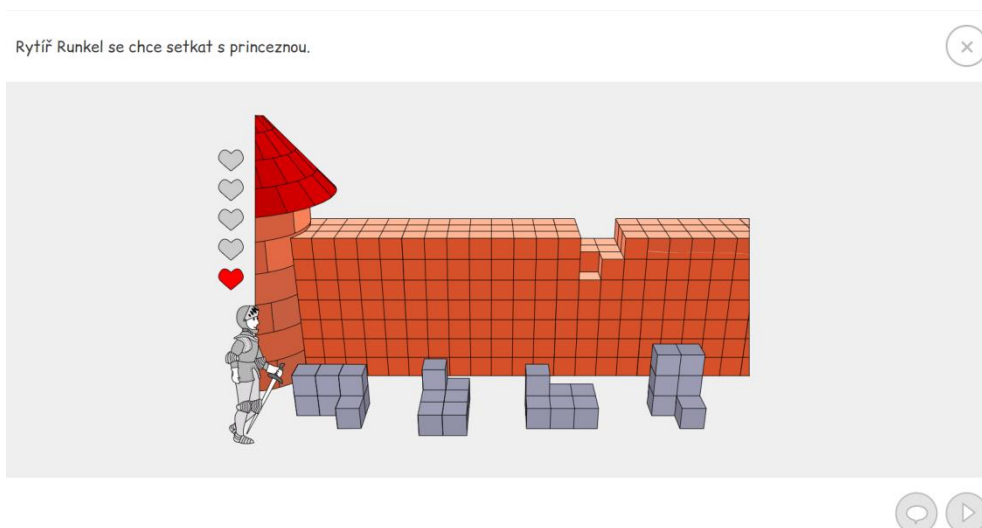


Obrázek 58 - Mathematikus - Sítě krychle - zadání podúlohy 1



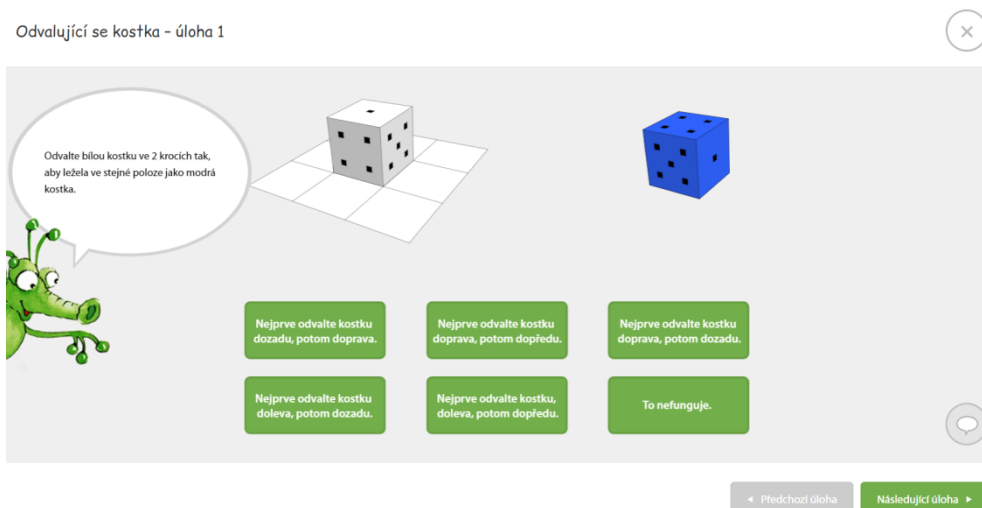
Obrázek 59 - Mathematikus - Sítě krychle - podúloha 1 - výsledek chybného přiřazení čtverce

Ve druhé úloze pojmenované „Rytíř Runkel“ žáci pomáhají rytíři Runkelovi s opravami děr ve zdech hradu (viz obr. 60). Ze zadané nabídky čtyř krychlových těles musí žáci v každé podúloze zvolit správné krychlové těleso, které zapadne do díry v hradební zdi. V některých podúlohách jsou k doplnění příslušné díry vhodná dvě krychlová tělesa. Jedná se o přímo shodná krychlová tělesa, která jsou pouze jinak umístěna či natočena na podložce. Podrobněji je úloha popsána v podkapitole 2.3 na straně 40.



Obrázek 60 - Mathematikus - RytířRunkel - zadání podúlohy 2

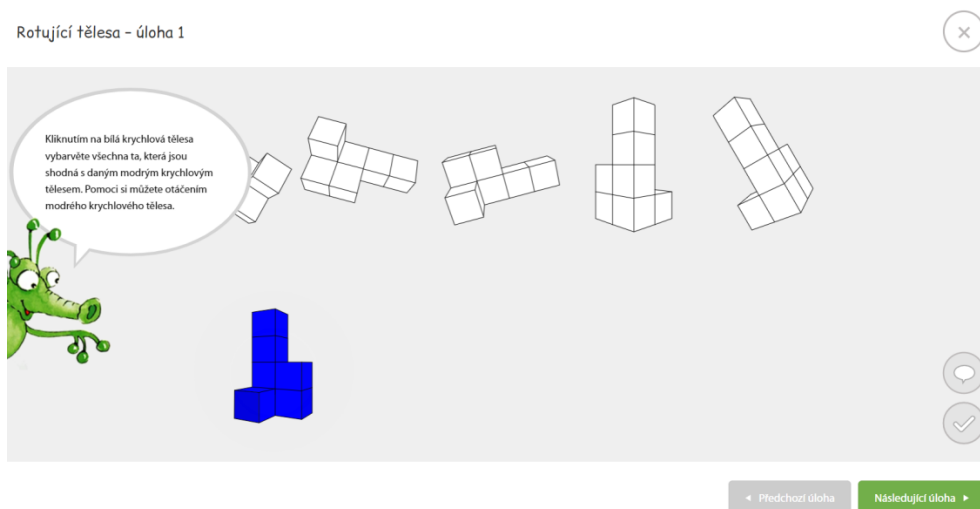
Třetí úloha se zabývá odvalováním hrací kostky (viz obr. 61). Úkolem úlohy je odvalení bílé hrací kostky pomocí dvou kroků tak, aby body na jejích stěnách odpovídaly umístění bodů na shodné vzorové modré hrací kostce, tj. tak, aby se dostala do polohy modré hrací kostky. Každá podúloha této úlohy má pouze jedno správné řešení. Dvojice žáků si musejí v představách uvědomit, jak je potřeba kostku odvalit, aby byla v požadované poloze. Žáci mají na výběr ze šesti možností, tím pádem mají trochu ulehčené přemýšlení, protože stačí, když si představí každou možnou nabízenou variantu, a nemusí tak vymýšlet vlastní cesty odvalování.



Obrázek 61 - Mathematikus - Odvalující se kostka - zadání podúlohy 1

Čtvrtá úloha, která se týká tématu „Rozbité krychle“ a v níž žáci musí zvolit z dané nabídky tří krychlových těles takové krychlové těleso, které zkompletuje krychlové těleso umístěné vlevo na stránce do celistvé krychle, je detailněji rozebrána a popsána v podkapitole 2.3 na straně 40.

V páté úloze s názvem „Rotující tělesa“ je úkolem označit všechna krychlová tělesa, která jsou přímo shodná s daným modrým krychlovým tělesem (viz obr. 62). Žáci si během řešení úlohy mohou otáčet modrým krychlovým tělesem tak, aby jej umístili, resp. natočili do takových poloh, ve kterých jsou zakreslena bílá krychlová tělesa, ze kterých mají přímo shodná krychlová tělesa vybírat. Žáci předem nevědí, kolik přímo shodných krychlových těles je zapotřebí v příslušné podúloze vybrat. Každá z podúloh má jiný počet správných řešení. Správný počet možných řešení se jim ukáže až po označení jimi navrhovaných řešení a po potvrzení jejich výběru pomocí stisknutí tlačítka se zaškrtnutím (viz obr. 63). Poté na základě zobrazené zpětné vazby v podobě slovního komentáře žáci vědí, zdali je potřeba dooznačit další možnost řešení či zdali je jejich řešení chybné atd.



Obrázek 62 - Mathematikus - Rotující tělesa - zadání podúlohy 1



Obrázek 63 - Mathematikus - Rotující tělesa - zobrazení zpětné vazby v podobě slovního komentáře

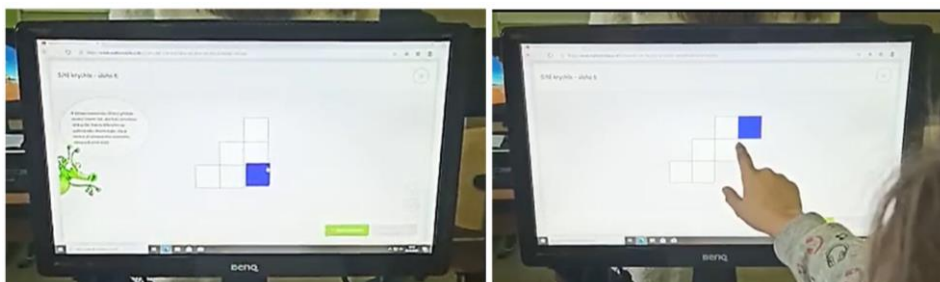
5.3 Vyhodnocení ostrého testování

Nyní zhodnotím kooperaci žáků ve dvojicích a jejich způsoby řešení úloh, umístěných ve webové platformě Mathematikus, během ostrého testování. I nadále bude zachována anonymita testovaných žáků. Každá dvojice žáků má přidělené stále stejné číslo, pod jakým byla vedena v hodnocení pilotního testování. Pouze u dvojice chlapců pod číslem 2 nastala změna, neboť se k nim při ostrém testování připojil ještě jeden spolužák. Opožděným přidělením tohoto žáka k uvedené dvojici chlapců bylo jeho pozdní odevzdání rodiči podepsaného souhlasu s pořízením fotografií a videozáznamu. K vyhodnocení ostrého testování nebylo tentokrát příhodné vytvoření pomocné tabulky s bodovým ohodnocením, veškeré komentáře popisující způsoby řešení zadaných úloh žáky budou tedy pouze slovní.

5.3.1 Komentáře ke způsobům řešení úlohy „Sítě krychle“

Při řešení podúloh úlohy pro téma „Sítě krychle“ dvojice žáků rychle pochopily, co je jejich úkolem. Většina dvojic splnila podúlohy této úlohy velice dobře a zvolila správná přiložení modrého čtverce na zpravidla první pokus. Žáci některých dvojic se střídali v přidávání modrého čtverce k obvodu bílého rovinného obrazce, aniž by mezi sebou nějak více komunikovali o řešení jednotlivých podúloh. Velice pěkně pracovala trojice žáků č. 2. Chlapci v této trojici se po celou dobu řešení této úlohy mezi sebou domlouvali a ukazovali si na obrazovce počítače, kam modrý čtverec přiřadí. Po samotném přemístění modrého čtverce všichni odsouhlasili svou volbu a poté zvolili políčko vyhodnocení. U dvou sítí se jim správné řešení nepovedlo najít ihned,

ovšem při následné opravě modrý čtverec již v obou případech umístili k bílému rovinnému obrazci správně. Jejich společnou práci ohodnotil jeden z nich slovy: „Docela nám to jde!“. Ve dvojici č. 3 (chlapec – dívka) rozhodoval chlapec správně, na která místa lze modrý čtverec k obvodům bílých rovinných obrazců přiřazovat. Pomocí prstů obou rukou naznačoval, jak se budou jednotlivé části bílého rovinného obrazce (čtverce) zavírat. Chlapci ve dvojici č. 4 (chlapec – chlapec) si zadání úlohy přeložili do svého žakovského jazyka následovně: „Máme to (modrý čtverec) dát tak, aby to (rovinný obrazec představující síť) šlo složit. To dáš. Kostka má čtyři strany (myšleny čtyři boční stěny).“ Přesunuli tedy modrý čtverec v podúloze 1 na obrazovce tak, aby vedle sebe ležely čtyři čtverce. Zbylé dva čtverce pak již byly správně umístěny, a tak vytvořený bílý rovinný obrazec tvořil jednu z možných sítí krychle. Tito dva chlapci minimálně dvakrát konstatovali, že tato úloha je lehká. V následujících podúlohách poznávali tvary sítě krychle z předešlých podúloh. V některých podúlohách bylo totiž možných vícero správných řešení. Tito dva chlapci si tuto skutečnost uvědomovali, jak právě plyne z jejich slov. U dvojice č. 4 mě zaujal postoj jednoho z žáků, kdy rozhodnul, kam je vhodné připojit modrý čtverec, ale ihned po jeho přemístění k obvodu bílého rovinného obrazce viděl, že jeho volba není správná, a uznal vlastní chybu. Tento poznatek je pro mě velice cenný, neboť mě těší, když žáci umí přiznat chybu, a navíc, když se z ní poučí.



Obrázek 64 - Mathematikus - Sítě krychle - chybné umístění a jedno z možných správných umístění modrého čtverce k rovinnému obrazci

Ve dvojici č. 6 (chlapec – dívka) dívka ukazuje na obrazovce správné umístění modrého čtverce k obvodu bílého rovinného obrazce, chlapec jí moc nevěří. Nakonec je pak ale překvapen o správnosti navrhovaného přiřazení. Žáci z dvojice č. 7 (chlapec – chlapec) umísťovali modrý čtverec k bílým rovinným obrazcům správně. Jeden z chlapců si po jeho přemísťování dlaněmi naznačoval zavírání čtverců rovinného obrazce, aby „viděl“, jaké čtverce rovinného obrazce pokryjí příslušné stěny krychle.

5.3.2 Komentáře ke způsobům řešení úlohy „Rytíř Runkel“

V úloze s pohádkovým příběhem žáci pomáhali rytíři Runkelovi opravovat hradební zdi volbou správných krychlových těles k vyplnění mezer v hradebních zdech, aby mohl rytíř Runkel získat princeznu. Při řešení jednotlivých podúloh této úlohy si žáci vedli velice obstojně.

Ve dvojici č. 1 (chlapec – dívka) ukazoval chlapec dívce možnost otáčení krychlového tělesa pomocí šipek, aby dívka lépe pochopila, jak funguje princip řešení tohoto úkolu. Následně společnými silami navrhovali řešení jednotlivých podúloh, všechny podúlohy splnili napoprvé správně.



Obrázek 65 - Mathematikus - Rytíř Runkel - názorné ukazování vybraného krychlového tělesa do díry v hradební zdi

I trojice č. 2 (chlapec – chlapec – chlapec) se nejprve učila ovládat přemísťování krychlových těles a zjišťovala možnosti užití otáčení krychlových těles při opravě hradebních zdí. Jeden z chlapců ihned viděl správná řešení všech pěti podúloh, ovšem kvůli střídání se ve trojici v ovládání myši a ve volbě řešení nechal přemýšlet i ostatní dva spolužáky. Tato trojice využila toho, že přiřazovala v každé podúloze více nabízených krychlových těles nad samotné hradební zdi, aby zjistila, zda zvolené krychlové těleso je či není vhodné a zda je případně potřeba zvolit jinou variantu. Z komunikace chlapců jasně vyplynulo, že po výběru a následném automatickém umístění zvoleného krychlového tělesa nad díru v hradební zdi jeden z nich okamžitě viděl, jak bylo naznačeno výše, zda zvolili správné krychlové těleso, a pokud ano, tak ještě dodal, zda je nutné vybrané krychlové těleso v nějakém směru otočit.

U dvojice č. 3 (chlapec – dívka) byl dominantnější chlapec. Viděli hned možnosti řešení zadaného úkolu díky své vynikající úrovni prostorové představivosti, jak již bylo zmíněno dříve, a tak jejich volba byla korektní již napoprvé u všech podúloh. Správnost řešení úloh byla díky jejich vhodně zvolenému principu řešení, a to že vzápětí po zobrazení zvoleného krychlového tělesa nad příslušnou zdí hradu viděli, jestli

vybrali správné či nesprávné krychlové těleso. V případě chybně zvoleného krychlového tělesa svou volbu neprodleně opravili.

Ve dvojici č. 4 (chlapec – chlapec) jeden z chlapců okamžitě při pohledu na zobrazená nabízená krychlová tělesa v podúloze 1 usoudil, že vybrané krychlové těleso musí být otočené, jinak to nepůjde. V podúloze 1 volili opakovaně obě dvě správná krychlová tělesa. Potýkali se totiž s technickými problémy, poněvadž nevěděli, jak mají vybraná krychlová tělesa otočit a následně vložit do díry v hradební zdi. Po chvíli však tento problém technického rázu sami překonali a vybrané krychlové těleso zvládli otočit a následně i vložit do díry v hradební zdi. Jeden z chlapců vybíral téměř okamžitě správná krychlová tělesa. Po zobrazení krychlového tělesa nad zedí v podúloze 3 poznamenal, že toto (míněno vybrané krychlové těleso) se ani nemusí otáčet. V podúloze 4 mu svítilo a řekl: „To je v podstatě stejný, jen to rotuje na jinou stranu.“ Měl tím pravděpodobně na mysli analogii mezi podúlohami 1 a 4, v nichž se doplňují shodná všechna čtyři nabízená krychlová tělesa, pouze v díry v hradebních zdech jsou pro tyto dvě podúlohy v jiné poloze, resp. směru.

Dvojice č. 5 (dívka – dívka) zvolila k řešení podúlohy 1 tohoto úkolu metodu pokus -omyl. V moment, kdy tato dvojice vypracovávala podúlohu 1, bylo na dívkách vidět, že postupně volí všechna krychlová tělesa a tipují, které krychlové těleso by bylo vhodněk vyplnění příslušné mezery v hradební zdi. Vyřešením podúlohy 1 dívky již zjistily, co je jejich úkolem a jaké jsou hlavní principy řešení této úlohy. Při řešení podúlohy² upozornila jedna dívka druhou, že v řešení jsou možná dvě krychlová tělesa: „Počkej, tak tady jdou obě dvě!“ Aktivnější dívka při řešení podúlohy 4 viděla, ale i okomentovala, že jednu díru ve zdi vyplní tato (a prstem na ni na monitoru ukazovala) krychle tohoto krychlového tělesa a „dvojdíru“ pak tyhle dvě krychle, které vzápětí prstem také označila. Po označení, otočení a následném umístění vybraného krychlového tělesa do hradební zdi si dívka mohla pomocí automaticky naprogramované zpětné vazby ověřit správnost svého úsudku.

Dvojice č. 7 (chlapec – chlapec) zvládala výběr správných krychlových těles k vyplnění děr v hradebních zdech bez problémů. Jeden z chlapců v podúloze 2 vybral správné krychlové těleso, druhý pak jeho volbu okomentoval slovy: „Ne, to nejde, to je zrcadlově. Otoč ho!“ Krychlové těleso nebylo sice nad hradební zdí zobrazeno zrcadlově, ale středově souměrně, což tedy žáci 5. ročníku v prostoru ještě ani nemohou rozlišit. Důležitá je ale skutečnost, že si už tito žáci 5. ročníku uvědomují nutnosti užití prostorových transformací.

5.3.3 Komentáře ke způsobům řešení úlohy „Odvalující se kostka“

Řešení podúloh úlohy s názvem „Odvalující se kostka“, v nichž je úkolem vybrat správnou variantu řešení ze šesti nabízených možností, bylo pro dvojice testovaných žáků velice obtížné. Většina dvojic při závěrečném hodnocení zmínila, že úloha „Odvalující se kostky“ je nejtěžší úlohou, která se v Mathematikusu nachází. Osobně mohu poznamenat, že stejný pocit jsem s nimi sdílela. I když mají uživatelé platformy Mathematikus na výběr pouze šest možností řešení, domnívám se, že uvědomit si, kam se kostka v popsanych směrech odvalí, a v představách si ještě k tomu vybavit, jaké počty bodů se na jejich viditelných stěnách ukáží a navíc v jakém směru, je velice náročné, a to i pro starší žáky, resp. uživatele platformy Mathematikus, než kterými byli testovaní žáci.

Dvojice č. 1 (chlapec – dívka) vždy, než označila správné řešení, vše společně pečlivě prokonzultovala, popř. si oba žáci ve dvojici vysvětlovali své úvahy a navzájem si obhajovali své vlastní názory. Obojím procvičovali tedy také své argumentační dovednosti a komunikační kompetence. U chlapce bylo znatelné, díky možnosti zpětného přehrání záznamu, že se snažil si v představách zobrazit danou hrací kostku a přetočit si ji do znázorněné polohy. Reakce dívky na chlapcova rozhodnutí byla velice povzbuzující. Vždy se radovala, když chlapec provedl správný výběr. Svého spolužáka také velmi chválila. I toto jsou důležité aspekty pro práci ve dvojicích. Také při řešení těchto podúloh se objevila metoda řešení pokus - omyl, a to u trojice č. 2 (chlapec – chlapec – chlapec) a dvojice č. 3 (chlapec – dívka).

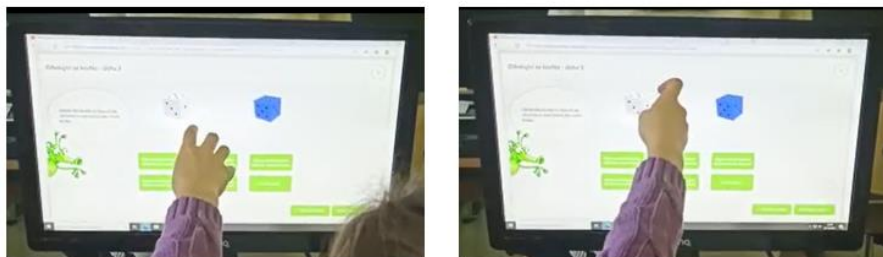
Chlapci ve trojici č. 2 si na začátku nepřčetli zadání úlohy, a tak důsledkem toho vůbec netušili, co mají v této úloze dělat. Text zadání jim po chvilce automaticky zmizel a oni nepřišli na to, jak jej mohou znovu zobrazit, proto byli zprvu bezradní. Paní učitelku však o pomoc nepožádali. Tlačítka s výběrem možností tedy vybírali metodou pokus - omyl. Až ve třetí podúloze na základě zobrazovaných animací vyvodili, jak mají při řešení podúloh postupovat. Žáci ve trojici č. 2 byli do řešení podúloh 3 a 4 ještě zapálení, ovšem po chvíli je řešení podúloh tohoto typu omrzelo a přestali se snažit.

Žáci dvojice č. 3 (chlapec – dívka) si poctivě přečetli zadání úlohy. Dívka v podúloze 1 napovídala chlapci, který ovládal myš, správné směry pohybu, ale chlapec ji dvakrát neuposlechl. Zkusil zvolit jiné směry pohybu odvalování kostky, ty však nebyly správným řešením. Na druhou stranu žáci v této dvojici velmi pěkně vzájemně komunikovali, podávali návrhy, argumentovali nejen slovy, ale i nonverbálně,

a to pomocí pohybů rukou. V podúloze 3, v níž žádný z navrhovaných pohybů neumožňuje odvalit kostku do zadané polohy, odvalili pomocí zvoleného tlačítka kostku do té polohy, kdy počty bodů na dvou viditelných stěnách kostky souhlasily, na třetí viditelné stěně však byly znázorněny body z protější stěny. Tu skutečnost, že žádná z uvedených nabídek není správná, si v tuto chvíli neuvědomili a trpělivě zkoušeli vymýšlet jiné směry pohybu. Po náhodné volbě tlačítka s nápisem „Nefunguje“ byli velmi překvapeni, že tato úloha nemá řešení.

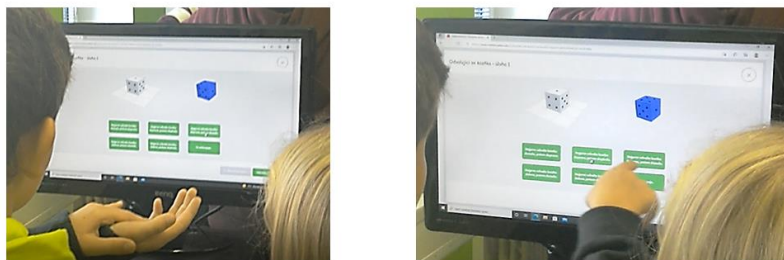
U žáků dvojice č. 4 (chlapec – chlapec) je zřejmé, že ani je tento typ podúloh nijak neupoutal. Spatřila jsem jejich nezaujetí a spíše jen práci pouze jednoho z chlapců. Jeden z chlapců si ve svých představách vytvářel správné obrazy postupného odvalování kostky, což lze usoudit ze zhlédnuté videonahrávky na základě toho, že vždy po chvíli po zobrazení úlohy na monitoru vyřkl správné směry odvalení kostky. Tento chlapec nijak nereagoval na poznámku svého spolužáka: „Tohle chci skončit, to mě nebaví.“ Přemýšlel zaujatě dále a správná řešení jednotlivých podúloh opakovaně nacházel. Na druhou stranu jeho spolužák neměl evidentně žádnou snahu úlohu řešit. Řešení této úlohy vzdal již po nezdařeném tipu v podúloze 1.

U dvojice č. 5 (dívka – dívka) jsem pozorovala, že ani pro ni nebylo řešení této úlohy snadné. Tato dvojice se setkala s mnoha neúspěchy, ale ani tak se nevzdala a snažila se vymyslet a označit správná řešení. Z videonahrávky je patrné, jak si dívky v této dvojici podávaly vzájemnou zpětnou vazbu. Když jedna z dívek odvalila v jedné z podúloh kostku chybně, druhá reagovala na její volbu negativně slovy: „Cos to udělala!“ Vzápětí navrhla své spolužačce náhradní volbu řešení. Druhá dívka ji pochválila sdělením: „Jo, dobře to myslíš!“ Z jejich konverzace je tedy evidentní snaha o nalezení správného řešení vypracovávané podúlohy. Dívky si při hledání správných možností řešení pomáhaly vyslovováním počtů bodů na jednotlivých stěnách nahlas a současným ukazováním rozmístění bodů na stěnách kostky prsty ruky.



Obrázek 66 - Mathematikus - Odvalující se kostka - řešení úlohy s pomocí ukazování bodů na stěnách kostky prsty ruky

Žáci ve dvojici č. 6 (chlapec – dívka) si na monitoru ukazovali body na stěnách bílé krychle, která se má otáčet. Rukama si naznačovali otáčení krychle.



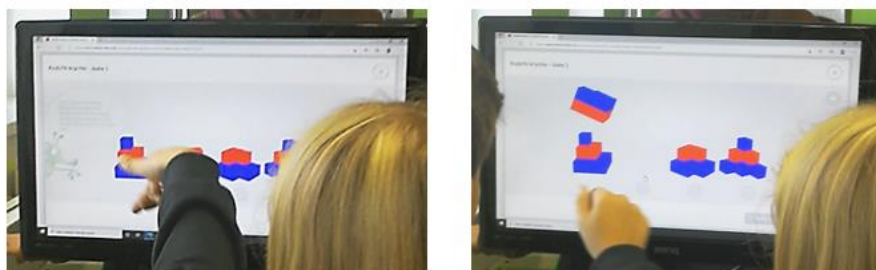
Obrázek 67 - Mathematikus - Odvalující se kostka - řešení úlohy s pomocí manipulace rukou

V podúloze 3 nemohli žáci dvojice č. 6 zprvu najít správné řešení. Podvakerát vybrali chybnou odpověď. Chlapec poté ztratil trpělivost, nechtělo se mu již déle přemýšlet, a proto stiskával jedno tlačítko po druhém, dokud neoznačil to, pod kterým se skrývala správná odpověď. Proto mohu konstatovat, že při řešení této podúlohy přešla i tato dvojice k užití metody pokus – omyl.

5.3.4 Komentáře ke způsobům řešení úlohy „Rozbité krychle“

V další úloze, v níž žáci museli zkompletovat krychlové těleso umístěné vlevo na stránce s jedním ze třech nabízených krychlových těles do celistvé krychle, byla u některých dvojic dosti znatelná jejich zbrkllost. I když v zadání úlohy byly veškeré pokyny popsány přesně a jasně, téměř každá dvojice činila zbytečná kliknutí, aby zjistila, jak princip tvoření celistvé krychle funguje. Žádná z testovaných dvojic nevyužila možnosti pomocného otáčení jednotlivých krychlových těles za účelem vytvoření si lepších představ jejich vzhledu, což mohlo být jednou z příčin jejich nesprávných voleb řešení v příslušných podúlohách.

Jediná dvojice č. 1 (chlapec – dívka) určila všechna hledaná krychlová tělesa správně na první pokus. Vzhledem k obdivuhodné komunikaci a spolupráci žáků v této dvojici, mě to nikterak nepřekvapilo. Tato dvojice žáků se skutečně vždy snažila zamyslet nad každou podúlohou a až poté volila vybrané řešení.



Obrázek 68 - Mathematikus - Rozbité krychle - řešení úlohy s pomocí manipulace rukou

Chlapci ve trojici č. 2 (chlapec – chlapec – chlapec) opět nečetli zadání úlohy, ale na druhou stranu ze zobrazených krychlových těles a na základě zkušeností získaných z principů řešení úlohy 3 zařazené do pilotního testování i bez přečtení zadání pochopili, co je úkolem této úlohy. I když chlapci z trojice č. 2 označovali tento úkol za lehký konstatováním: „Tato úloha je megaeasy,“ panovala u žáků této trojice nesoustředěnost a při zjišťování principu úkolu volila unáhlená nesprávná řešení. Jeden z chlapců po vyřešení této úlohy dokonce přiznal, že své návrhy řešení tipoval. Stejně jako trojice chlapců, tak i dvojice děvčat, tj. dvojice č. 5 (dívka – dívka), si řádně nepřečetla zadání této úlohy a teprve postupně pozorováním naprogramovaných animací vyvodila správný princip řešení.

Dívka ve dvojici č. 3 (chlapec – dívka) počítala chybějící krychle v příslušných řadách jednotlivých krychlových těles, čímž následně snadno odvodila, které z nabízených krychlových těles je v dané podúloze vhodné k doplnění vzorového krychlového tělesa do celistvé krychle.

Dvojici č. 4 (chlapec – chlapec) se nedařilo nalézt správná řešení prvních dvou podúloh, postupně nevhodně volila řešení těchto dvou podúloh. U následujících podúloh se pak již více zamýšlela, což bylo znát i na výsledcích nadcházejících podúloh, které byly určeny správně. Tato úloha se zalíbila i chlapci ze dvojice č. 4 (chlapec – chlapec), který rezignoval na hledání řešení podúloh úlohy „Odvalující se kostka“. Většinu správných řešení však objevil jeho spolužák, který správně vyřešil předchozí sérii úloh. Ten chybnou volbu řešení svého spolužáka u podúlohy 2 okomentoval slovy: „Nevím proč, ale to (měl tím na mysli krychlové těleso vybrané spolužákem) nevypadá.“ Uměl tedy vyloučit nesprávně zvolené krychlové těleso, ale své pochybnosti odůvodnit nedokázal.

Dívka ve dvojici č. 6 (chlapec – dívka) po chvíli viděla a na monitoru následně ukazovala v jednotlivých podúlohách této úlohy správná krychlová tělesa k doplnění příslušných krychlových těles zobrazených vlevo na stránce Mathematikusu. Chlapec jejím návrhům ne vždy věřil.

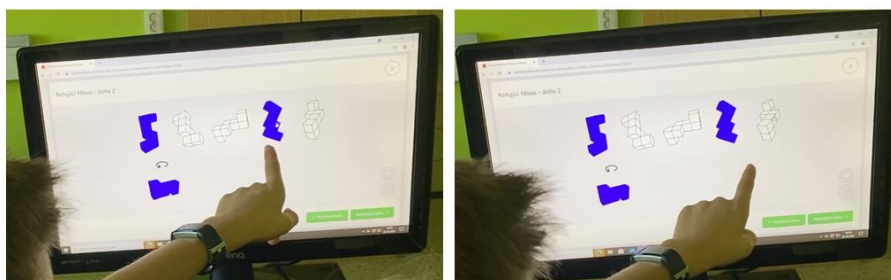
Jeden z chlapců ve dvojici č. 7 (chlapec – chlapec) si evidentně dle videonahrávky doplňoval ve svých představách chybějící dílčí krychle v jednotlivých vrstvách zadaného krychlového tělesa, stejně jako dívka ve dvojici č. 3. Podle počtu chybějících dílčích krychlí pak vybíral krychlová tělesa z daných nabídek. Jeho volby byly pokaždé bezchybné.

5.3.5 Komentáře ke způsobům řešení úlohy „Rotující tělesa“

V poslední úloze ostrého testování bylo úkolem vybrání všech zobrazených bílých krychlových těles, která jsou přímo shodná s daným modrým krychlovým tělesem umístěným v levé spodní části okna webové platformy. V podúlohách této úlohy bylo pro žáky nepříjemné, že do určení první volby a jejího následného vyhodnocení nevěděli, kolik přímo shodných krychlových těles je v příslušné podúloze potřeba označit, aby mohli pokračovat v dalším vypracovávání podúloh. Zpětná vazba v podobě písemného komentáře se jim vždy ukázala až po volbě alespoň jednoho krychlového tělesa a kliknutí na zaškrtnávkó. Dvojice žáků si v mnoha případech rády pomáhaly otáčením původního modrého krychlového tělesa pro vytvoření lepších představ jeho vzhledu a postupem času všichni testovaní žáci došli k označení všech správných možností.

Díky zpětným vazbám, které přicházely po každém zakliknutí zaškrtnávkó, bylo hledání správných řešení této úlohy trochu jednodušší a žáci tak věděli, kolik krychlových těles je ke správnému vyřešení jednotlivých podúloh ještě potřeba označit. Ovšem ani tak neoznačovala většina testovaných žáků správná přímo shodná krychlová tělesa na první pokusy.

Chlapec z dvojice č. 1 (chlapec – dívka) si lépe dokázal představit prostorové situace, a tak velice laskavě vysvětlil své spolužačce základní myšlenku celé úlohy. Prstem ukázal na obrazovce pomyslné otočení krychlové stavby, aby si správnou názornou představu udělala i jeho spolužačka.



Obrázek 69 - Mathematikus - Rotující tělesa - řešení úlohy s pomocí manipulace rukou

Chlapci ve trojici č. 2 (chlapec – chlapec – chlapec) opětovně poctivě nečetli zadání úlohy, ale úkol úlohy okamžitě vypožorovali. Chlapci ve trojici označili zprvu pouze jedno možné řešení, ale po provedení první kontroly dohledávali na základě zobrazených zpětných vazeb ostatní správné možnosti. Jeden z chlapců v této trojici

se domníval, že je potřebné, aby krychlové těleso modré barvy mělo naprosto stejnou polohu jako ostatní bílá zobrazená krychlová tělesa, se kterými se nedalo nijak otáčet. I když tato jeho úvaha nebyla zcela správná, považoval ji tento žák za velice důležitou pro určení výsledků podúloh (analogickou myšlenku měla také dvojice č. 4 (chlapec – chlapec)). Zbývající dva spolužáci se mu sice snažili jeho názor vymluvit tvrzením, že modré krychlové těleso nemusí být „orotované“ do stejných poloh, v jakých jsou zobrazena bílá krychlová tělesa, že stačí pouze označit stejná tělesa. Utvrzelý chlapec však v této trojici ovládal myš, nedbal rad spolužáků a snažil se urputně nastavit modré krychlové těleso do všech poloh, v nichž byla v jednotlivých podúlohách zobrazena všechna nabízená bílá krychlová tělesa. Otáčení modrého krychlového tělesa do všech uvedených poloh považoval dle svých slov za docela těžké a „blbě“ vymyšlené. Přetáčel však vzorové modré krychlové těleso do všech poloh, aby ve trojici mohli ověřit správnost jejich výběru. Hledání správných řešení komentovali chlapci slovy: „Vypadá to jednoduše a přitom je to extrémně hard!“ Pokud chlapci této trojice našli všechna správná řešení jednotlivých podúloh, s kladnými emocemi a důrazem v tónu hlasu zvolávali: „Yes!“

Žáci dvojice č. 3 (chlapec – dívka) bez obtíží otáčeli modré krychlové těleso do shodných poloh, v nichž byla zobrazena bílá nabízená krychlová tělesa. Hledaná přímo shodná krychlová tělesa pak postupně správně označovali. Ve dvojici č. 4 (chlapec – chlapec) chlapec s vyšší úrovní prostorové představivosti našel během chvíle obě dvě přímo shodná krychlová tělesa v podúloze 1. V podúloze 2 byl přesvědčen, že správným řešením je pouze jedno krychlové těleso: „Bude to jen tohle.“ Objevivší se zpětná vazba v podobě věty: „Našli jste jen 1 ze 3 možných řešení.“ jej zaskočila. Reagoval na ni zvoláním: „To ne!“ Společně se spolužákem se poté snažili najít chybějící dvě správná řešení, ale v několika následujících pokusech úspěšní nebyli, což komentovali slovy: „Tak to si děláš srandu!“ A když se jim nakonec podařilo všechna tři správná krychlová tělesa určit, oddychli si a šikovnější z nich řekl: „No konečně!“ Různý počet správných řešení v jednotlivých podúlohách je zmátl natolik, že v následující podúloze 3 hledali rovnou dvě správná řešení, avšak v této podúloze je správné řešení pouze jen jedno. Chlapce s vyšší úrovní prostorové představivosti

to ale nezaskočilo a v podúloze 4 našel ihned všechna tři správná řešení.

Děvčata ze dvojice č. 5 (dívka – dívka) zvolila v podúloze 1 této úlohy zprvu tři řešení, ale vzápětí poznamenala, že to nedává smysl, aby měla podúloha tři správná

řešení. Zobrazení zpětné vazby jim napovědělo, že jedno ze zvolených krychlových těles je označeno navíc. To vyvrátilo jejich teorii o existenci pouze jednoho správného řešení každé podúlohy této úlohy. Žáci ve dvojici č. 6 (chlapec – dívka) si natáčeli modré vzorové krychlové těleso, ale zobrazená přímo shodná tělesa většinou nepoznávali, a tak označovali v podúlohách zpravidla jedno krychlové těleso po druhém.

Závěr

Hlavním cílem této práce bylo ukázat využití interaktivní webové platformy Mathematikus ve vyučovacích hodinách geometrie na 1. stupni základní školy.

Práce byla uvedena vymezením pojmu prostorová představivost. Definováním tohoto pojmu se v průběhu několika desítek let věnovalo mnoho různých autorů, kteří k problematice spojené s tímto pojmem přistupovali z různých úhlů pohledu. Prostorovou představivost využívá v průběhu svého života při různých příležitostech, za různých okolností a v různé míře snad téměř každý člověk, a proto je důležité ji už od nejútlejšího věku pilně trénovat a rozvíjet. Interaktivní webová platforma Mathematikus i ukázky možností procvičování prostorové představivosti propojují jednotlivé kapitoly této práce.

Jedním z možných způsobů procvičování prostorové představivosti při výuce geometrie na 1. stupni základní školy je zařazování a následné řešení vhodných a obtížnostně odpovídajících úloh ze spontánní stereometrie. V této práci byla navržena sada úloh nejen pro možné doplnění již stávajících úloh umístěných na interaktivní webové stránce Mathematikus, ale také k zadávání žákům v běžných hodinách geometrie bez využití platformy Mathematikus. K základním zadáním jednotlivých navržených úloh byly přidány také různé další možné alternativy zadání těchto úloh.

V práci byla popsána interaktivní webová platforma Mathematikus společně s úlohami, které jsou na ní do této chvíle umístěny. Jsou poukázány a popsány možnosti využití interaktivní webové platformy Mathematikus při výuce. Úlohy umístěné v této platformě umožňují rozvoj prostorové představivosti v jiné podobě, než pouze pomocí vypracovávání úloh žáky na papíře či křídou na tabuli. Speciálně naprogramované virtuální animace, pomocí nichž jsou úlohy v platformě Mathematikus vytvořené, nabízejí uživatelům platformy jiný přístup k řešení úloh.

Před samotným ostrým testováním, tj. zkoumáním způsobů řešení úloh umístěných ve webové platformě Mathematikus žáky 5. ročníku vybrané základní školy bylo uskutečněno pilotní testování téže skupiny žáků. Pilotní testování spočívalo v zadání a následném řešení úloh ve speciálně sestaveném pracovním listu. Cíleně vybrané úlohy měly testované žáky připravit k lepšímu pochopení podstaty řešení úloh umístěných na interaktivní webové stránce Mathematikus. Obě fáze testování probíhaly na základě předchozí domluvy v 5. třídě Základní a Mateřské školy Březno. Žáci 5. třídy uplatnili během vypracovávání úloh v obou částech testování svoje dosavadní

znalosti a zkušenosti, které byly společně s úrovněmi jejich prostorové představivosti užitečné. V komentářích hodnocení jsem podotýkala jejich způsoby a cesty vedoucí nejen ke správnému, ale i chybnému řešení úloh. Testovaní žáci obecně nenacházeli správné řešení okamžitě na první pokus. Díky tomu, že pracovali ve dvojicích, bylo zajímavé a také velmi podstatné pozorování jejich komunikace a spolupráce. Ukázalo se, že u některých testovaných žáků není prostorová představivost jejich silnou stránkou, a tak je potřebné ji u těchto žáků cíleně trénovat a rozvíjet. Je mi ovšem jasné, že ne každý žák bude mít tuto schopnost rozvinutou na stejné úrovni. Dvojice žáků používaly různé postupy a metody řešení úloh umístěných ve webové platformě Mathematikus. Ty jsou zmíněny v komentářích u jednotlivých úloh.

V celkovém pohledu na veškeré výsledky bylo znatelné, že žáci velice rádi pracují s něčím neobvyklým, pro ně novým a že se u takovýchto pro ně nových činností více snaží. V mnoha případech při společném závěrečném zhodnocení proběhlého testování žáci tvrdili, že je práce s platformou Mathematikus velice bavila, protože mohli rovnou vidět jak výsledek své volby řešení, tak i průběh celého řešení jednotlivých úloh. Mohli si veškeré úkoly a možnosti jejich řešení zvolit tak, aby bylo vidět i špatné řešení. Ve dvojicích a následně pak v třídní skupině mohli komunikovat o problematice řešených úloh, rozvíjet odůvodňování vlastní myšlenky, obhajovat si svůj názor před spolužáky. A tak testování absorbovalo mnohem více faktorů než pouhé samotné testování využití interaktivní webové platformy Mathematikus ve vyučovacích hodinách geometrie na 1. stupni základní školy.

V procvičování a rozvíjení prostorové představivosti se nabízí široké pole působnosti, je jen na každém pedagogovi, jak tuto problematiku uchopí. Tato práce ukázala dvě možnosti rozvoje prostorové představivosti - pomocí užití interaktivní webové platformy Mathematikus a také zařazením vhodných úloh ze spontánní stereometrie.

Na závěr je vhodné konstatovat, že stanovené cíle diplomové práce byly naplněny. Byly shrnuty teoretické poznatky o prostorové představivosti a o pojmech s tímto tématem spojené. Byly navrženy úlohy, které je možné zařadit jako doplňující úlohy do platformy Mathematikus. Samotná ukázka využití této platformy při výuce na 1. stupni základní školy proběhla v rámci ostrého testování, na kterou byli žáci připraveni pomocí pilotního testování. Ukázalo se, že zařazení webové platformy do vyučovacích hodin geometrie je přínosné, a to nejen proto, že žáci dostávají okamžitou zpětnou vazbu, a že každý může pracovat dle vlastního pracovního tempa.

Seznam použitých zdrojů

1. ČÁP, Jan. *Psychologie výchovy a vyučování*. Praha: Karolinum, 1993. ISBN 80-7066-534-3.
2. EICHLER, K.-P. u. a.: *Mathematikus*. - 1. Westermann, Braunschweig 1999. 85 s. ISBN-13: 9783141117714
3. HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3.
4. KOUTECKÁ, Lucie. *Prostorové origami jako didaktické prostředí v matematickém vzdělávání*. Plzeň, 2012. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni
5. MOLNÁR, Josef. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. 2., rozš. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2009. ISBN 978-80-244-2254-1.
6. MOLNÁR, Josef, PERNÝ, Jaroslav a STOPENOVÁ, Anna. *Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji*. In Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu. 1. vyd. Praha: JČMF, 2006. ISBN 80-7015-085-8.
7. PŮLPÁN, Zdeněk, Vladimír KEBZA a František KUŘINA. *O představivosti a její roli v matematice*. Praha: Academia, 1992. ISBN 80-200-0444-0.
8. PRŮCHA, Jan, Eliška WALTEROVÁ a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník*. 7., aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2013. ISBN 978-80-262-0403-9.
9. ŠAROUNOVÁ, Alena. *Geometrická představivost*. Praha, 1982. Disertační práce. Univerzita Karlova v Praze.
10. VORDERMAN, C.: *HelpYourKidswithMaths*. DorlingKindersley Limited, London 2014. 264 p. ISBN 978-1-4093-5571-7
11. sady učebnic a pracovních sešitů Matematiky pro 1. stupeň ZŠ

Elektronické odkazy

12. HEJZLAROVÁ, Kateřina. *Rozvíjení geometrické představivosti a tvořivosti v podmínkách vyučování matematice na 1. stupni základní školy* [online]. Hradec Králové, 2017. Diplomová práce. Pedagogická fakulta Hradec Králové.
13. ITEM – ImproveTeacherEducation in Mathematics [online]. Dostupné z: <https://kmd.fp.tul.cz/cs/activities/item>
14. Kleineschule.com.de [online]. Dostupné z: <https://www.kleineschule.com.de/>
15. Mathematikus [online]. Dostupné také z: <https://www.mathematikus.de/startseite>

16. MŠMT ČR. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, [online], 2021.
Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/4983_1_1
17. PRÁŠKOVÁ, Marie. *Rozvoj prostorové představivosti se zřetelem k diferencované výuce* [online]. Brno, 2008. Diplomová práce. Masarykova univerzita.
18. Scratch [online]. Dostupné z: <https://scratch.mit.edu/>

Seznam příloh

1. Příloha 1 – Souhlas s pořízením a zpracováním fotografických a audiovizuálních záznam

SOUHLAS S POŘÍZENÍM A ZPRACOVÁNÍM FOTOGRAFICKÝCH A AUDIOVIZUÁLNÍCH ZÁZNAMŮ

Já, níže podepsaný/á

jméno, příjmení:

e-mail:

jakožto zákonný zástupce mého dítěte

jméno a příjmení:

(dále jen „**dítě**“)

v souvislosti s výzkumem prováděným v rámci sepisování diplomové práce na Katedře matematiky a didaktiky matematiky Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické Technické univerzity v Liberci v akademickém roce 2021-2022

vyslovuji souhlas,

aby diplomatka Jana Ždánková (dále jen „**diplomantka**“) za pomoci žáků 8. či 9. ročníku ZŠ Březno v souvislosti s prováděným výzkumem pořídila fotografické a audiovizuální záznamy mého „**dítěte**“ a aby „**diplomantka**“ shromažďovala a zpracovávala bez časového i prostorového omezení fotografické a audiovizuální záznamy mého „**dítěte**“ a využívala je v níže uvedeném rozsahu a za následujících podmínek:

DRUH OSOBNÍCH ÚDAJŮ:

- fotografie, audiovizuální záznam (dále jen „**AV záznamy**“)

POŘIZOVATEL AV ZÁZNAMŮ:

- „**diplomantka**“
- žáci 8. či 9. ročníku ZŠ Březno

TERMÍN POŘIZOVÁNÍ AV ZÁZNAMŮ:

- 18. 10. 2021 – 12. 11. 2021

ZPRACOVATEL AV ZÁZNAMŮ:

- „**diplomantka**“

ZPŮSOB VYUŽITÍ AV ZÁZNAMŮ:

- „**AV záznamy**“ budou použity výhradně pro účely prováděného výzkumu v rámci zpracování podkladů sepisované diplomové práce

- „**AV záznamy**“ nebudou v žádné podobě nikde zveřejněny, a to ani v sepsované diplomové práci

MÍSTO ULOŽENÍ AV ZÁZNAMŮ:

- osobní nosič elektronických informací (pevný či externí disk PC/notebooku) „**diplomantky**“

ZPŘÍSTUPNĚNÍ AV ZÁZNAMŮ TŘETÍM OSOBÁM:

- „**AV záznamy**“ budou v případě potřeby pomoci s jejich zpracováním v rámci prováděného výzkumného šetření zpřístupněny vedoucí diplomové „**diplomantky**“ – Mgr. Daniele Bímové, Ph.D. (odborné asistence na KMD FP TUL)

Současně jsem srozuměn/a s tím, že mohu uplatnit své právo na přístup a opravu osobních údajů dítěte, případně požadovat nápravu porušení povinností při jejich zpracování kontaktováním „**diplomantky**“ na e-mailu jana.zdanska@tul.cz nebo na telefonu 732107355.

Tento souhlas je vytvořen v souladu s pravidly GDPR o zpracování osobních údajů, která upravují nakládání s osobními údaji a s pořizováním a používáním podobizny.

V..... dne.....2021

Podpis zákonného zástupce:.....