Analytická geometrie v prostoru

1. Vektory

1.1 Skalární součin

1. Vypočtěte skalární součin vektorů $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, -1, 5)$.

2. Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 2)$ a $\mathbf{w} = (3, 2, -4)$. Určete vektor **t**, pro nějž platí $\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = -5$, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = 11$, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{w} = 20$.

3. K danému vektoru určete alespoň jeden kolmý vektor:
   a) $\mathbf{a} = (-1, 3, 5)$, $\mathbf{b} = (x, 2, 3)$ $[x = 21]$
   b) $\mathbf{c} = (1, 0, 3)$, $\mathbf{d} = (-5, y, 3)$ [y neexistuje]
   c) $\mathbf{e} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{f} = (5, y, 3)$ $[y = -7]$
   d) $\mathbf{g} = (2, -3, 3)$, $\mathbf{h} = (1, 4, z)$ $[z = \frac{10}{3}]$
   e) $\mathbf{m} = (4, 7, -3)$, $\mathbf{n} = (2, 1, z)$ $[z = 5]$

4. Zjistěte, zda dané vektory
   a) $\mathbf{a} = (3, 2, -4)$, $\mathbf{b} = (-2, 5, 1)$, $\mathbf{c} = (4, -1, 5)$ [NE]
   b) $\mathbf{u} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{v} = (-4, 2, -1)$, $\mathbf{w} = (1, 1, -2)$ [ANO]
   c) $\mathbf{r} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{s} = (-4, 2, -1)$, $\mathbf{t} = (-3\ 1, 0)$ [NE]

   tvoří ortogonální skupinu či nikoliv.

5. Vypočtěte úhel φ dvou vektorů $\mathbf{a} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 1, 4)$. $[\varphi = 38{,}17°]$
   $\mathbf{u} = (4, -3, 7)$, $\mathbf{v} = (-2, 1, -9)$ $[\varphi = 80°\,37'\,16{,}7'']$

6. Jsou dány body $A\,[3, 0, 8]$, $B\,[-5, 4, 9]$. Určete velikost vektoru **a** = **AB**.
   $[|\mathbf{a}| = |\mathbf{AB}| = 9]$

7. Trojúhelník *MNQ* je dán svými vrcholy $M\,[-3, 8, -3]$, $N\,[-1, 2, 3]$, $Q\,[8, 4, 2]$.
   a) Zjistěte, zda je trojúhelník *MNQ* pravoúhlý. [Je pravoúhlý.]
   b) Vypočtěte velikosti stran trojúhelníku *MNQ* a určete cosiny jeho vnitřních úhlů.

   $$\left[\begin{array}{l} |NM| = 2\sqrt{19},\ |QN| = \sqrt{86},\ |MQ| = 9\sqrt{2}, \\ \alpha = 46°\,46'\,10'',\ \beta = 90°,\ \gamma = 43°\,13'\,50'' \end{array}\right]$$

8. Trojúhelník *ABC* je dán svými vrcholy $A\,[5, 1, 6]$, $B\,[8, 3, 2]$, $C\,[6, 8, 3]$.
   a) Zjistěte, zda je trojúhelník *ABC* pravoúhlý. [Je pravoúhlý.]

© Daniela Bímová

b) Vypočtěte velikosti stran trojúhelníku *ABC* a určete cosiny jeho vnitřních úhlů.

$$\left[\begin{array}{l} |AB| = \sqrt{29},\ |BC| = \sqrt{30},\ |AC| = \sqrt{59}, \\ \cos\alpha = \sqrt{\tfrac{29}{59}},\ \beta = 90°,\ \cos\gamma = \sqrt{\tfrac{30}{59}} \end{array}\right]$$

9. Trojúhelník *ABC* je dán svými vrcholy $A\,[3, 1, 1]$, $B\,[1, -2, 1]$, $C\,[2, -3, -1]$.
   a) Zjistěte, zda je trojúhelník *ABC* pravoúhlý. [Není pravoúhlý.]
   b) Vypočtěte velikosti stran trojúhelníku *ABC* a určete cosiny jeho vnitřních úhlů.

$$\left[\begin{array}{l} |AB| = \sqrt{13},\ |AC| = \sqrt{21},\ |BC| = \sqrt{6}, \\ \cos\alpha = \tfrac{14\cdot\sqrt{273}}{273},\ \cos\beta = \tfrac{\sqrt{78}}{78},\ \cos\gamma = \tfrac{7\cdot\sqrt{126}}{126} \end{array}\right]$$

10. Dokažte, že body $A\,[7, 2, 6]$, $B\,[4, 5, 6]$, $C\,[3, 1, -4]$ jsou vrcholy trojúhelníka a spočítejte obsah tohoto trojúhelníka.

$$\left[\begin{array}{l} \Delta\ ABC \text{ je rovnoramenný} \\ P = 22,5\ j.^2 \end{array}\right]$$

11. Vypočtěte velikost vektoru $\mathbf{a} = (-3, 5, 4)$. K danému vektoru **a** určete příslušný jednotkový vektor.

1.2 Vektorový součin

1. Vypočtěte vektorový součin vektorů
   a) $\mathbf{a} = (1, -3, 2)$, $\mathbf{b} = (-3, 0, 2)$ $[\mathbf{c} = (-6, -8, -9)]$
   b) $\mathbf{u} = (3, -1, 5)$, $\mathbf{v} = (4, 2, -1)$ $[\mathbf{w} = (-9, 23, 10)]$
   c) $\mathbf{c} = (-4, -3, 6)$, $\mathbf{d} = (7, 2, -5)$ $[\mathbf{e} = (3, 22, 13)]$
   d) $\mathbf{e} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{f} = (-4, 2, -1)$ $[\mathbf{g} = (-7, -7, 14) = (1, 1, -2)]$

2. Vypočtěte souřadnice vektoru **c**, který je kolmý na vektory $\mathbf{a} = (2, -5, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 4, -2)$. $[\mathbf{c} = (6, 7, 43)]$

3. Určete všechny vektory kolmé na vektory $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$
   $[\mathbf{c} = m\cdot(1, -59, -51),\ m \in \mathbf{R}]$

4. Vypočtěte obsah rovnoběžníka *ABCD* určeného vektory
   a) $\mathbf{a} = (3, 9, -1)$, $\mathbf{b} = (7, 4, -2)$ $[\mathbf{c} = (-14, -1, -51),\ S = |\mathbf{c}| = 51]$
   b) $\mathbf{u} = (3, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (-2, 2, 1)$ $[\mathbf{w} = (2, -1, 6),\ S = |\mathbf{w}| = \sqrt{41}]$

© Daniela Bímová

2. Rovina

2.1 Rovnice roviny

a) Napište **normálový tvar** rovnice roviny α, je-li dán její normálový vektor a její bod

a) $\mathbf{n}^{\alpha} = (2, 7, 5)$, $A\,[3, 4, 8]$;

b) $\mathbf{n}^{\beta} = (-4, 2, 3)$, $A\,[3, -1, 6]$.

b) Napište **obecnou rovnici** roviny, je-li dána

a) bodem $A\,[3, -1, 2]$ a normálovým vektorem $\mathbf{n}^{\alpha} = (-3, 5, -9)$;

$[\alpha : -3x + 5y - 9z + 32 = 0]$

$B\,[-1, 4, 5]$ $\mathbf{n}^{\beta} = (2, -1, 3)$;

$[\beta : 2x - y + 3z - 9 = 0]$

$C\,[-3, 5, 0]$ $\mathbf{n}^{\gamma} = (4, -2, 7)$;

$[\gamma : 4x - 2y + 7z + 22 = 0]$

b) bodem a dvěma nekolineárními vektory

$B\,[1, 3, -4]$, $\mathbf{a} = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (4, 5, -2)$

$[\beta : -10x + 6y - 5z - 28 = 0]$

$C\,[1, 2, 3]$, $\mathbf{c} = (3, -2, 4)$, $\mathbf{b} = (4, 5, -2)$

$[\gamma : -16x + 10y + 17z - 55 = 0]$

$D\,[0, 3, 0]$, $\mathbf{u} = (3, -2, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 0, 2)$

$[\delta : 2x + 3y - 9 = 0]$

$E\,[1, 2, 3]$, $\mathbf{e} = (2, 4, 6)$, $\mathbf{f} = (5, 3, 8)$

$[\varepsilon : -x - y + z = 0]$

$F\,[1, 2, 3]$, $\mathbf{g} = (1, 5, 3)$, $\mathbf{h} = (3, -2, 4)$

$[\varphi : 26x + 5y - 17z + 15 = 0]$

$G\,[3, 1, 2]$, $\mathbf{l} = (2, -1, -1)$, $\mathbf{m} = (3, -1, 2)$

$[\rho : 3x + 7y - z - 14 = 0]$

$H\,[0, 1, 0]$, $\mathbf{n} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{o} = (1, 2, 1)$

$[\omega : x - z = 0]$

$I\,[3, -1, -2]$, $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{q} = (2, -1, -2)$

$[\psi : x - 2y + z - 3 = 0]$

c) trojicí nekolineárních bodů

$A\,[0, 0, 0]$, $B\,[1, 1, 1]$, $C\,[-2, 7, 0]$ $[\alpha : 7x + 2y - 9z = 0]$

$D\,[1, 2, 3]$, $E\,[6, 4, 2]$, $F\,[3, 6, 5]$ $[\varepsilon : 2x - 3y + 4z - 8 = 0]$

$G\,[2, 2, 4]$, $H\,[4, -5, 1]$, $I\,[3, 4, -5]$ $[\rho : 69x + 15y + 11z - 212 = 0]$

$J\,[2, 1, 5]$, $K\,[0, 4, -1]$, $L\,[3, 4, -7]$ $[\varphi : 6x + 10y + 3z - 37 = 0]$

$M\,[3, -1, 5]$, $N\,[6, -2, 7]$, $O\,[4, 2, 3]$

$P\,[2, 4, 1]$, $Q\,[4, 2, -1]$, $R\,[-5, -3, -1]$ $[\omega : 5x - 9y + 14z + 12 = 0]$

© Daniela Bímová

d) bodem $A\,[2, 3, -4]$ a přímkou p: $x = 2 + 3t$, $t \in \mathbf{R}$
$y = -1 - 2t$
$z = -3 + 4t$
$[\alpha : 14x - 3y - 12z - 67 = 0]$

bodem $B\,[2, 1, -3]$ a přímkou p: $x = 1 - t$, $t \in \mathbf{R}$
$y = t$
$z = 2 - 2t$ $[\alpha : 3x + 7y + 2z - 7 = 0]$

bodem $C\,[-1, 2, 0]$ a přímkou p: $t = \frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{1}$, $t \in \mathbf{R}$
$[\gamma : 4x + 3y - 5z - 2 = 0]$

bodem $C\,[-3, 1, 0]$ a průsečnicí p rovin $\alpha : x + 2y - z + 4 = 0$ a $\beta : 3x - y + 2z - 1 = 0$
$[\rho : 20x + 19y - 5z + 41 = 0]$

e) dvěma různými rovnoběžnými přímkami a: $x = 2 + t$, $t \in \mathbf{R}$, b: $x = 9 - r$, $r \in \mathbf{R}$
$y = 5 - 3t$ $y = -2 + 3r$
$z = 1 + 4t$ $z = 2 - 4r$
$[\alpha : 25x + 27y + 14z - 199 = 0]$

c) Rovina ρ prochází bodem $A\,[-2, 5, 7]$ a její normálový vektor je $\mathbf{n}^{\rho} = (21, 15, 8)$. Uveďte **obecnou rovnici** roviny ρ a rozhodněte, zda rovina ρ prochází počátkem soustavy souřadnic O.
$[\rho : 21x + 15y + 8z = 0, O \in \rho]$

d) Napište **obecnou rovnici** roviny α, pro niž znáte její parametrické rovnice
$\alpha : x = u + v,\ u, v \in \mathbf{R}.$
$y = u - v,$
$z = 5 + 6u - 4v$ $[\alpha : x + 5y - z + 5 = 0]$

e) Napište **parametrickou rovnici** roviny, která je dána
a) bodem $A\,[1, -4, 6]$ a dvěma nekolineárními vektory $\mathbf{a} = (2, 7, -6)$, $\mathbf{b} = (3, 9, 5)$
$B\,[1, 5, -3]$ $\mathbf{u} = (2, -7, 9)$, $\mathbf{v} = (-5, 0, 3)$

b) trojicí nekolineárních bodů

$A\,[2, 1, 2]$, $B\,[3, 2, 1]$, $C\,[-5, 1, -3]$

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha : x = 2 + t - 7s, & t, s \in \mathbf{R} \\ \quad y = 1 + t & \\ \quad z = 2 - t - 5s & \end{array}\right]$$

$D\,[1, 2, 3]$, $E\,[6, 4, 2]$, $F\,[3, 6, 5]$

© Daniela Bímová

c) bodem $A\,[2, 3, -4]$ a přímkou p: $x = 2 + 3t$, $t \in \mathbf{R}$
$y = -1 - 2t$
$z = -3 + 4t$

d) dvěma různými rovnoběžnými přímkami a: $x = 2 + t$, $t \in \mathbf{R}$, b: $x = 9 - r$, $r \in \mathbf{R}$
$y = 5 - 3t$ $\quad$ $y = -2 + 3r$
$z = 1 + 4t$ $\quad$ $z = 2 - 4r$

f) Rovina σ je určena body $A\,[2, 3, 1]$, $B\,[3, 1, 4]$, $C\,[2, 1, 5]$. Napište **různá analytická vyjádření** roviny σ.

$[\sigma : x + 2y + z - 9 = 0]$

g) Sestavte rovnici roviny α v **úsekovém tvaru**, jestliže tato rovina prochází bodem $A\,[3, 5, -7]$ a na souřadnicových osách vytíná stejně dlouhé úseky.

$[\alpha : \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} - 1 = 0]$

2.2 Grafické znázornění roviny

1. V ortonormální souřadnicové soustavě zakreslete rovinu

a) $\alpha : x - 4y - 3z + 1 = 0$

[průsečíky s osami: $P_x\,[-1, 0, 0]$, $P_y\,[0, \frac{1}{4}, 0]$, $P_z\,[0, 0, \frac{1}{3}]$]

b) $\beta : 2x + 3y + 4z - 12 = 0$

[průsečíky s osami: $P_x\,[6, 0, 0]$, $P_y\,[0, 4, 0]$, $P_z\,[0, 0, 3]$]

c) $\gamma : 2x + 3y - 2z - 12 = 0$

[průsečíky s osami: $P_x\,[6, 0, 0]$, $P_y\,[0, 4, 0]$, $P_z\,[0, 0, -6]$]

d) $\delta : 2x + y - z + 3 = 0$

[průsečíky s osami: $P_x\,[-\frac{3}{2}, 0, 0]$, $P_y\,[0, -3, 0]$, $P_z\,[0, 0, 3]$]

e) $\varepsilon : 36x - 25y + 10z - 58 = 0$

[průsečíky s osami: $P_x\,[\frac{29}{18}, 0, 0]$, $P_y\,[0, -\frac{58}{25}, 0]$, $P_z\,[0, 0, \frac{58}{10}]$]

f) $\varphi : x = 3 - 2t + 3s,\ t, s \in \mathbf{R}$
$y = 1 + t - 2s$
$z = 3 - 4t + s$

[průsečíky s osami: $P_x\,[4, 0, 0]$, $P_y\,[0, \frac{14}{5}, 0]$, $P_z\,[0, 0, -28]$

g) $\phi : x = 1 + t + s,\quad t, s \in \mathbf{R}$
$y = 2 - t + s$
$z = \quad t + s$

[průsečíky s osami: $P_x\,[1, 0, 0]$, P_y není definováno, $P_z\,[0, 0, -2]$]

h) $\eta : A\,[3, -8, 2]$, $B\,[8, -5, 5]$, $C\,[11, -7, 6]$

[$\kappa : x + 8y + 9z - 18 = 0$, průsečíky s osami: $P_x\,[18, 0, 0]$, $P_y\,[0, \frac{9}{4}, 0]$, $P_z\,[0, 0, 2]$]

© Daniela Bímová

3. Přímka

3.1 Rovnice přímky

1. Charakterizujte přímku p: $\begin{aligned} x &= 2t, \\ y &= -3t \\ z &= 1+4t \end{aligned}$ $t \in \mathbf{R}$. Jaký bod leží na přímce p?

$[P\,[0, 0, 1], \mathbf{u} = (2, -3, 4)]$

2. Napište **parametrickou rovnici** přímky p, která je dána
   a) bodem $A\,[1, 4, -5]$ a směrovým vektorem $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$
   $B\,[4, -5, 7]$ $\mathbf{v} = (3, 4, 5)$
   b) dvojicí bodů $A\,[3, -7, -5]$, $B\,[-5, 1, 2]$
   $C\,[1, 2, -1]$, $D\,[2, 1, 4]$
   $E\,[2, -2, 0]$, $F\,[-5, 1, -2]$
   $G\,[-2, 7, -3]$, $H\,[6, -9, 0]$
   c) jako průsečnice dvou různoběžných rovin

$\alpha: 7x + 3y - z = 27$, $\beta: 2x - 2y + 6z = -26$ (volte $x = 2$) $\left[\begin{aligned} p: x &= 2+4t, t \in \mathbf{R} \\ y &= 3-11t \\ z &= -4-5t \end{aligned}\right]$

$\gamma: 2x - y + z - 1 = 0$, $\delta: x + y + 2z + 3 = 0$ $\left[\begin{aligned} p: x &= -\tfrac{2}{3} - t, t \in \mathbf{R} \\ y &= -\tfrac{7}{3} - t \\ z &= t \end{aligned}\right]$

$\rho: x - 2y + 3z - 5 = 0$, $\sigma: 3x + y - 4z - 7 = 0$ (volte $x = 2$) $\left[\begin{aligned} p: x &= 2+5t, t \in \mathbf{R} \\ y &= -3+13t \\ z &= -1+7t \end{aligned}\right]$

$\kappa: 7x + 3y - z - 27 = 0$, $\lambda: x - y + 3z + 13 = 0$ $\left[\begin{aligned} p: x &= 1+8t, t \in \mathbf{R} \\ y &= \tfrac{23}{4} - 22t \\ z &= -\tfrac{11}{4} - 10t \end{aligned}\right]$

$\phi: x + y + z - 1 = 0$, $\varphi: 2x + y - z + 2 = 0$ $\left[\begin{aligned} p: x &= -3+2t, t \in \mathbf{R} \\ y &= 4-3t \\ z &= t \end{aligned}\right]$

$\alpha: 2x - y - 8z + 10 = 0$, $\beta: \begin{aligned} x &= 1-u+v, \\ y &= 1+2u+v, \quad u, v \in \mathbf{R} \\ z &= 3-u \end{aligned}$ $\left[\begin{aligned} p: x &= -1+5t, t \in \mathbf{R} \\ y &= 8+2t \\ z &= t \end{aligned}\right]$

2. Pro přímku AB uveďte její vektorovou rovnici a její parametrické vyjádření, je-li $A\,[1, 0, -2]$, $B\,[2, 4, -4]$.

$\left[\begin{aligned} &AB: X = [1, 0, -2] + t \cdot (1, 4, -2), t \in \mathbf{R}, \\ &AB: x = 1+t, y = 4t, z = -2-2t, t \in \mathbf{R} \end{aligned}\right]$

© Daniela Bímová

4. Polohové úlohy

4.1 Vzájemná poloha bodu a přímky

1. Zjistěte, zda body $A\,[1, 0, 1]$, $B\,[1, 5, 3]$ leží na přímce p: $x = 1,\ t \in \mathbf{R}$.
$y = 3 + t$
$z = -1 + 2t$
$[A - \text{ne}, B - \text{ano}]$

2. Zjistěte, který z bodů $A\,[5, 7, 1]$, $B\,[0, \frac{1}{2}, 0]$ leží na přímce p: $x = 1 + 2t$, $t \in \mathbf{R}$.
$y = 2 + 3t$
$z = 3 + 6t$
$[A - \text{ne}, B - \text{ano}]$

3. Vypočítejte souřadnice bodu $M\,[2, y, z]$ tak, aby ležel na přímce p: $x = 1 + t$, $t \in \mathbf{R}$.
$y = 2t$
$z = 4 - t$
$[y = 2, z = 3]$

4.2 Vzájemná poloha dvou přímek

4.2.1 Zjišťování vzájemné polohy dvou přímek

1. Rozhodněte o vzájemné poloze dvou přímek:

a) p: $x = 1 + 2t$, $y = 7 + t$, $z = 3 + 4t$ $\quad$ q: $x = 6 + 3s$, $y = -1 - 2s$, $z = -2 + s$, $t, s \in \mathbf{R}$,

b) u: $x = 2 + 4t$, $y = -6t$, $z = -1 - 8t$ $\quad$ v: $x = 7 - 6s$, $y = 2 + 9s$, $z = 12s$, $t, s \in \mathbf{R}$,

c) a: $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 2t$, $z = -t$ $\quad$ b: $x = -2s$, $y = -5 + 3s$, $z = 4$, $t, s \in \mathbf{R}$,

Jedná-li se o různoběžky, vypočtěte souřadnice jejich průsečíku. Jedná-li se o rovnoběžky nebo různoběžky, napište obecnou rovnici, ve které dané přímky leží.

[(a) různoběžky, $P\,[-3, 5, -5]$, $9x + 10y - 7z - 58 = 0$]
[(b) rovnoběžky, $5x - 22y + 19z + 9 = 0$]
[(c) mimoběžky]

4.2.2 Zjišťování vzájemné polohy trojice přímek

1. Rozhodněte o vzájemné poloze trojice přímek:

© Daniela Bímová

o: $x = 2 + t$, $y = -1 + 3t$, $z = 1 + 2t$ $\quad$ p: $x = 4 + 2s$, $y = 5 + 6s$, $z = 6 + 4s$ $\quad$ q: $x = 3 - 3r$, $y = 2 - 9r$, $z = 3 - 6r$, $t, s, r \in \mathbf{R}$

[o a p jsou různé rovnoběžky, o a q jsou splývající rovnoběžky]

4.2.3 Různoběžky

1. Vypočítejte souřadnice průsečíku Q přímek p: $x = 4 + t$, $y = -1 - t$, $z = 2 + 5t$; q: $x = -1 + 3s$, $y = s$, $z = -7 - s$, $t, s \in \mathbf{R}$, pokud existuje.

   [$Q\,[2, 1, -8]$, přímky p, q leží v rovině α: $-x + 4y + z + 6 = 0$]

2. Napište parametrické rovnice přímky a jdoucí bodem $A\,[-1, 0, 4]$, která protíná přímku b: $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - t$, $t \in \mathbf{R}$, pod pravým úhlem. Jaké souřadnice má průsečík P těchto přímek?

   $$\left[\begin{array}{l} a: x = -1 + 5r,\ r \in \mathbf{R}, \quad P\left[\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{13}{3}\right] \\ \quad y = -2r \\ \quad z = 4 + r \end{array}\right]$$

4.2.4 Rovnoběžky

1. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s danou přímkou
   a) $A\,[4, -2, 3]$, a: $x = 1 + t$, $y = -2 + 3t$, $z = 2 - t$, $t \in \mathbf{R}$;
   b) $B\,[1, 0, 3]$, b: $x = 4t$, $y = -1 + t$, $z = 3 + 5t$, $t \in \mathbf{R}$;
   c) $C\,[3, 5, 1]$, c: $x = 2 + 4t$, $y = -3t$, $z = -3$, $t \in \mathbf{R}$.

2. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A\,[1, -1, 3]$ a je rovnoběžná s průsečnicí rovin $\alpha: x + y - 2z - 3 = 0$ a $\beta: 2x - y + 3z - 5 = 0$.

3. Bodem $M\,[2, 5, 6]$ veďte přímku r rovnoběžnou s průsečnicí p rovin $\alpha: 2x + 5y + 7z - 2 = 0$ a $\beta: x - 2y - 8z - 4 = 0$ a rovinu γ kolmou na přímku p.

   $$\left[\begin{array}{l} r: x = 2 - 26t,\ \gamma: 26x - 23y + 9z + 9 = 0 \\ \quad y = 5 + 23t \\ \quad z = 6 - 9t \end{array}\right]$$

© Daniela Bímová

4.3 Vzájemná poloha bodu a roviny

1. Určete, který z bodů $K[3, 2, 7]$, $L[0, 2, 1]$, $M[-8, -6, -3]$ leží v rovině $\rho: 2x - 3y - 2z - 8 = 0$.

   $[K \notin \rho, L \notin \rho, M \in \rho]$

2. Jaké musí být hodnoty proměnných a, b, aby body $A[1, a, 3]$, $B[b, 6, 2]$ ležely v rovině $\rho: 2x - 3y - 2z - 8 = 0$?

   $[a = -4, b = -3]$

4.4 Vzájemná poloha rovin

4.4.1 Zjišťování vzájemné polohy rovin

1. Rozhodněte o vzájemné poloze dvou rovin:
   a) $\alpha: x + 2y + 3z - 1 = 0$ a $\beta: 3x + 4y + z - 1 = 0$
   b) $\gamma: 3x - 2y - 3z + 5 = 0$ a $\delta: 9x - 6y - 9z - 5 = 0$ [rovnoběžné různé]
   c) $\varepsilon: x + y + z - 1 = 0$ a $\varphi: 2x + 2y - 2z + 3 = 0$ [různoběžné]

2. Určete vzájemnou polohu rovin $\alpha: 3x + y - z + 4 = 0$ a $\phi: x = 1 + t + s,\ t, s \in \mathbf{R}$.
   $y = 2 - t + s$
   $z = t + s$
   [různoběžné s průsečnicí $p: x = t,\ t \in \mathbf{R}$.
   $y = -5 - 2t$
   $z = -1 + t$]

3. Rozhodněte o vzájemné poloze tří následujících rovin
   a) $\alpha: x + 2y - z = 0$, $\beta: 2x + 2y + z - 4 = 0$, $\gamma: x - 2y - 2z + 4 = 0$
   [protínají se v bodě $P[1, -\frac{1}{2}, 3]$]
   b) $\alpha: 2x - 4y + 5z - 21 = 0$, $\beta: x - 3y + 18 = 0$, $\gamma: 6x + y + z - 30 = 0$
   [protínají se v bodě $P[3, 5, 7]$]
   c) $\alpha: x - 2y + 3z - 1 = 0$, $\beta: 3x + 2y - 4z - 2 = 0$, $\gamma: 5x + 2y + 2z - 4 = 0$
   [α, β různoběžné s průsečnicí $p: x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t,\ t \in \mathbf{R}$,
   $y = -\frac{1}{8} + \frac{13}{8}t$
   $z = t$
   β, γ různoběžné s průsečnicí $q: x = s,\ s \in \mathbf{R}$]
   $y = \frac{5}{3} - \frac{13}{6}s$
   $z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}s$

4. Pro kterou hodnotu $\lambda \in \mathbf{R}$ nemají roviny o rovnicích $\alpha: x + y + z - 3 = 0$, $\beta: x + \lambda \cdot y + z + 1 = 0$, $\gamma: 2x + y - z - 2 = 0$ žádný společný bod?

   $[\lambda = 1]$

© Daniela Bímová

4.4.2 Dvě navzájem rovnoběžné roviny

1. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s danou rovinou
   a) $A\,[2, 3, 4]$, $\beta : x + 2y + 3z + 4 = 0$ $\quad [\alpha : x + 2y + 3z - 20 = 0]$
   b) $A\,[5, 6, -3]$, $\beta : 2x + 7y - 2z + 1 = 0$ $\quad [\alpha : 2x + 7y - 2z - 58 = 0]$
   c) $A\,[4, 0, 2]$, $\beta : 4y - 5z + 8 = 0$ $\quad [\alpha : 4y - 5z + 10 = 0]$

2. Rovina α je určena trojicí nekolineárních bodů $A\,[2, 1, 2]$, $B\,[3, 2, 1]$, $C\,[-5, 1, -3]$, rovina β je s ní rovnoběžná a prochází bodem $D\,[3, 4, 2]$. Napište obecné rovnice obou rovin.
   $[\alpha : 5x - 12y - 7z + 16 = 0,\ \beta : 5x - 12y - 7z + 47 = 0]$

3. Určete obecnou rovnici roviny ρ, která prochází bodem $M\,[-5, 3, 2]$ a je rovnoběžná s rovinou σ: $A\,[3, 1, -1]$, $B\,[2, 2, 0]$, $C\,[1, 5, 1]$.
   $[\rho : x + z + 3 = 0]$

4.4.3 Dvě navzájem různoběžné roviny

1. Určete obecnou rovnici roviny $\rho \equiv ABC$, kde $A\,[-2, 2, 1]$, $B\,[4, 6, 2]$, $C\,[2, \frac{1}{2}, 6]$, a určete průsečnice této roviny se souřadnicovými rovinami (xy) a (yz).
   $$\left[\begin{array}{ll} \rho : 43x - 52y - 50z + 240 = 0, & \rho : x = -2 + 6t + 8s,\ t, s \in \mathbf{R} \\ & \quad\ \ y = 2 + 4t - 3s \\ & \quad\ \ z = 1 + t + 10s \\ p^{\rho} : x = -\frac{240}{43} + \frac{52}{43}u,\ u \in \mathbf{R}, & n^{\rho} : x = -\frac{240}{43} + \frac{50}{43}v,\ v \in \mathbf{R} \\ \quad y = t & \quad y = 0 \\ \quad z = 0 & \quad z = v \end{array}\right]$$

2. a) Určete parametrické rovnice průsečnice dvou navzájem různoběžných rovin $\alpha : 2x - y + z - 1 = 0,\ \beta : x + y + 2z + 3 = 0$.
   $$\left[\begin{array}{l} p : x = -\frac{2}{3} - t,\ \ t \in \mathbf{R} \\ \quad y = \frac{11}{3} - t \\ \quad z = t \end{array}\right]$$
   b) Určete parametrické rovnice průsečnice dvou navzájem různoběžných rovin $\gamma : 3x + 2y - 4z - 2 = 0,\ \beta : 5x + 2y + 2z - 4 = 0$.
   $$\left[\begin{array}{l} p : x = t,\ \ t \in \mathbf{R} \\ \quad y = \frac{5}{3} - \frac{13}{6}t \\ \quad z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t \end{array}\right]$$

4.4.4 Dvě navzájem kolmé roviny

1. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází dvěma danými body a je kolmá k dané rovině

© Daniela Bímová

a) $A\,[7, -2, 3]$, $B\,[-1, 3, 5]$, $\beta: -2x + 4y + 3z - 9 = 0$

$[\alpha: 7x + 20y - 22z + 57 = 0]$

b) $C\,[8, -3, 1]$, $D\,[4, 7, 2]$, $\beta: 3x + 5y - 7z - 21 = 0$

$[\alpha: 3x + y + 2z - 23 = 0]$

2. Napište obecnou rovnici roviny α, která je tvořena přímkou $p \equiv AB$, kde $A\,[1, 5, 2]$, $B\,[3, 3, -4]$, a která je kolmá na rovinu $\beta: 5x + 7y - z + 1 = 0$.

$[\alpha: 11x - 7y + 6z + 12 = 0]$

3. Napište obecnou rovnici promítací roviny α přímky a: $x = 3 + 2t$, $t \in \mathbf{R}$, při
$y = 2 + 3t$
$z = 1 - 4t$
kolmém promítání do roviny $\pi: 3x + y - 4z = 5$.

$[\alpha: 8x + 4y + 7z - 39 = 0]$

4. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází daným bodem a je kolmá na dvě navzájem různoběžné roviny

a) $A\,[5, 1, 4]$, $\alpha: 2x - 3y + 5z - 1 = 0$, $\beta: 5x + y - 3z - 2 = 0$

$[\gamma: 4x + 31y + 17z - 119 = 0]$

b) $B\,[2, -1, 1]$, $\alpha: x + y + z - 3 = 0$, $\beta: 3x + 2y - z + 4 = 0$

$[\delta: 3x - 4y + z - 11 = 0]$

4.5 Vzájemná poloha bodu a roviny

1. Rozhodněte, zda body

a) $A\,[1, -1, 2]$, $B\,[3, 0, -1]$, $C\,[2, 1, -1]$, $D\,[0, -1, 3]$,

b) $A\,[2, -1, -2]$, $B\,[1, 2, 1]$, $C\,[2, 3, 0]$, $D\,[5, 0, -6]$

leží v jedné rovině.

2. Zjistěte, zda body

a) $A\,[1, 0, 1]$, $B\,[1, 5, 3]$ leží v rovině $\alpha: 3x - z - 2 = 0$. [A – ano, B – ne]

b) $C\,[5, 7, 1]$, $D\,[0, \frac{1}{2}, 0]$ $\beta: 2x - 6y + 4z + 3 = 0$

4.6 Vzájemná poloha přímky a roviny

4.6.1 Zjišťování vzájemné polohy přímky a roviny

1. Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ.

a) p: $x = -1 + 2t$, $t \in \mathbf{R}$, $\rho: 3x - 3y + 2z - 5 = 0$ $[p \,//\, \rho,\ p \not\subset \rho]$
$y = 3 + 4t$
$z = 3t$

b) p: $x = 13 + 8t$, $t \in \mathbf{R}$, $\rho: x + 2y - 4z + 1 = 0$ $[p \subset \rho]$
$y = 1 + 2t$
$z = 4 + 3t$

© Daniela Bímová

4.6.2 Rovina kolmá k přímce

1. Napište obecnou rovnici roviny, která prochází daným bodem a je kolmá k dané přímce

   a) $A\,[0, -1, 2]$, a: $x = 2 + t$, $t \in \mathbf{R}$; $\quad [\alpha : x + 2y + 3z - 4 = 0]$
   $y = 3 + 2t$
   $z = 4 + 3t$

   b) $B\,[-2, -7, 13]$, b: $x = -3 + 2t$, $t \in \mathbf{R}$. $\quad [\alpha : 2x - 4y - z - 11 = 0]$
   $y = 5 - 4t$
   $z = 5 - t$

   c) $O\,[0, 0, 0]$, p: $x = -2 + 4t$, $t \in \mathbf{R}$; $\quad [\rho : 4x + 5y - 2z = 0]$
   $y = 3 + 5t$
   $z = 1 - 2t$

   d) $C\,[6, 3, 2]$, p: $x = 1 - 2t$, $t \in \mathbf{R}$; $\quad [\rho : 2x - y + 4z - 17 = 0]$
   $y = 10 + t$
   $z = -4t$

2. Určete parametrické rovnice roviny, která prochází bodem $A\,[2, 1, -1]$ a je kolmá k přímce určené body $B\,[1, 1, 1]$, $C\,[1, 3, -1]$.

3. Napište obecnou rovnici roviny souměrnosti úsečky AB, kde $A\,[1, 4, -2]$, $B\,[7, -2, 4]$.
   $[\alpha : x - y + z - 4 = 0]$

4. Určete obraz bodu $A\,[6, 2, 4]$ v osové souměrnosti podle přímky o: $x = 1 - t$, $t \in \mathbf{R}$.
   $y = 12 + t$
   $z = t$
   $[A'\,[\frac{10}{3}, \frac{44}{3}, -\frac{34}{3}]]$

4.6.3 Přímka kolmá k rovině

1. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází daným bodem a je kolmá na danou rovinu
   a) $A\,[0, 3, 1]$, $\alpha : 3x + 2y - z + 1 = 0$
   b) $B\,[1, 2, -3]$, $\beta : x + 3y - 1 = 0$
   c) $C\,[2, -1, 2]$, $\gamma : x - y + z + 13 = 0$

2. Napište parametrické rovnice přímky p, která prochází bodem $B\,[2, 0, 5]$ a která je kolmá na rovinu $\rho \equiv ABC$, kde $A\,[1, 1, 3]$, $B\,[4, 5, -6]$.

3. Napište parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem $M\,[3, 1, -2]$ a je

© Daniela Bímová

kolmá k rovině ρ dané dvěma rovnoběžnými přímkami a: $x = 1 - t$, $t \in \mathbf{R}$, a
$y = 2 - t$
$z = t$

b: $x = 2 - s$, $s \in \mathbf{R}$.
$y = -2 - s$
$z = 3 + s$

4. Určete rovnici přímky k, která prochází bodem $A[1, 2, -1]$ kolmo na rovinu ρ: $x = 2 - 3t + s$, $t, s \in \mathbf{R}$.
$y = -3 + t - s$
$z = 2 - 4t + 5s$

$$\left[\begin{array}{l} p: x = 1 + r,\ r \in \mathbf{R};\ \rho: x + 11y + 2z + 27 \\ \quad y = 2 + 11r \\ \quad z = -1 + 2r \end{array}\right]$$

5. Vypočtěte souřadnice bodu, který je souměrně položen podle roviny $\sigma: x - 4y + z + 7 = 0$ k bodu $A[2, 7, 1]$.

$[A'[4, -1, 3]]$

6. Určete souřadnice bodu A', který je symetrický k bodu $A[5, 13, 2]$ podle roviny $\rho \equiv (h, f)$, kde h: $x = 2 + 3t$, $y = -2 - t$, $z = -12$ a f: $x = 2 - s$, $y = -2$, $z = -12 - 2s$, $t, s \in \mathbf{R}$.

$[A'[-3, -11, 6]]$

4.6.4 Kolmý průmět bodu do roviny

1. Určete kolmý průmět daného bodu do dané roviny
   a) $A[3, 1, -1]$, $\alpha: 3x + y + z - 20 = 0$ $\quad [A_1[6, 2, 0]]$
   b) $B[3, 1, -1]$, $\beta: x + 2y + 3z - 30 = 0$ $\quad [B_1[5, 5, 5]]$
   c) $C[3, 1, -1]$, $\gamma: x + 2y + 3z - 16 = 0$ $\quad [C_1[4\ 3, 2]]$
   d) $D[3, 1, -1]$, $\delta: x + 2y + 3z = 0$ $\quad [D_1[\frac{20}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{10}{7}]]$
   e) $E[3, 1, -1]$, $\varepsilon: x - 2y + 3z = 0$ $\quad [E_1[\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -2]]$

4.6.5 Přímka různoběžná s rovinou - průsečík přímky s rovinou

1. Vypočítejte souřadnice průsečíku P dané přímky s danou rovinou

   a) p: $x = 3t$, $y = 2 + t$, $z = -2 - t$, $t \in \mathbf{R}$, $\alpha: x - y + 3z + 6 = 0$ $\quad [P[-6, 0, 0]]$
   b) q: $x = 3 - t$, $y = 4t$, $t \in \mathbf{R}$, $\alpha: 5x + y - z + 8 = 0$ $\quad [P[-1, 16, 19]]$

© Daniela Bímová

$z = -1 + 5t$

c) r: $x = 1 + 2t$, $t \in \mathbf{R}$, $\rho : x + 2y - z + 1 = 0$ $[P\,[7, -1, 6]]$

$y = 2 - t$

$z = 3 + t$

2. Určete souřadnice průsečíku P dané přímky s danou rovinou

a) $p \equiv AB$, kde $A\,[1, 3, 5]$, $B\,[-1, 2, 10]$, $\alpha : x - 2y + 3z + 5 = 0$ $[P\,[3, 4, 0]]$

b) $q \equiv RQ$, kde $R\,[10, 3, -9]$, $Q\,[-2, 7, -1]$, $\rho : 7x - y + 3z + 8 = 0$ $[P\,[1, 6, -3]]$

c) $r \equiv A\mathbf{u}$, kde $A\,[1, 0, 3]$ a směrový vektor $\mathbf{u} = (3, 4, 2)$, $\rho : 2x + 3y - 2z - 4 = 0$ $[P\,[\frac{19}{7}, \frac{16}{7}, \frac{29}{7}]]$

3. Stanovte průsečíky přímky p se souřadnicovými rovinami.

a) p: $x = 6 + 2t$, $t \in \mathbf{R}$

$y = -2 + 4t$

$z = -5t$

$[P_{xy}\,[6, -2, 0], P_{xz}\,[7, 0, -\frac{5}{2}], P_{yz}\,[0, -14, 15]]$

b) p: $x = 1 + 3t$, $t \in \mathbf{R}$

$y = 2 + 4t$

$z = 4 + 2t$

$[P_{xy}\,[-5, -6, 0], P_{xz}\,[-\frac{1}{2}, 0, 3], P_{yz}\,[0, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}]]$

c) p: $x = 2 - t$, $t \in \mathbf{R}$

$y = 3 + 4t$

$z = t$

$[P_{xy}\,[2, 3, 0], P_{xz}\,[\frac{11}{4}, 0, -\frac{3}{4}], P_{yz}\,[0, 11, 2]]$

4. Napište parametrickou rovnici přímky $p \equiv AB$, kde $A\,[7, 1, 6]$, $B\,[-3, -5, 4]$, a určete její průsečíky se souřadnicovými rovinami.

$$\left[\begin{array}{l} p : x = 7 + 5t,\ t \in \mathbf{R}, \quad X\,[0, -\frac{16}{5}, \frac{23}{5}], Y\,[\frac{16}{3}, 0, \frac{17}{3}], Z\,[-23, -17, 0] \\ \quad y = 1 + 3t \\ \quad z = 6 + t \end{array}\right]$$

5. Je dána rovina ρ: $x = 1 + t + s + s$, $t, s \in \mathbf{R}$.

$y = 2 + 3t - s$

$z = 5t + s$

a) Vypočítejte průsečíky roviny ρ se souřadnicovými osami a rovinu ρ nakreslete.

b) Napište rovnice přímek, ve kterých rovina ρ protíná souřadnicové roviny.

6. Určete parametrické vyjádření přímek $a = AB$, kde $A\,[-2, 5, 1]$, $B\,[\frac{3}{2}, 2, 5]$, $b = CD$, kde $C\,[3, 7, 4]$, $D\,[5, 2, 4]$, $c = EF$, kde $E\,[-5, 3, 3]$, $F\,[-5, 3, 6]$. Vypočítejte stopníky přímek – průsečíky přímek s rovinami (xy) a (yz).

© Daniela Bímová

$$\left[\begin{array}{l} a: x = -2 + \tfrac{7}{2}t,\ t \in \mathbf{R}, \quad P_a\left[-\tfrac{23}{8}, \tfrac{23}{4}, 0\right], N_a\left[\tfrac{23}{6}, 0, \tfrac{23}{3}\right] \\ \quad y = 5 - 3t \\ \quad z = 1 + 4t \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} b: x = 3 + 2s,\ s \in \mathbf{R}, \quad P_b \text{ neexistuje}, N_b\left[\tfrac{29}{5}, 0, 4\right] \\ \quad y = 7 - 5s \\ \quad z = 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} c: x = -5,\ r \in \mathbf{R}, \quad P_c\left[-5, 3, 0\right], N_c \text{ neexistuje} \\ \quad y = 3 \\ \quad z = 3 + 3r \end{array}\right]$$

7. Bodem $A\left[-2, -7, 13\right]$ veďte rovinu α kolmou k přímce p: $x = -3 + 2t$, $t \in \mathbf{R}$, a
$y = 5 - 4t$
$z = 5 - t$
určete její průsečík s přímkou p.

$$\left[\alpha: 2x - 4y - z - 11 = 0, P\left[1, -3, 3\right]\right]$$

4.5.5 Pravoúhlý průmět přímky do roviny

1. Přímka p je dána jako průsečnice rovin α, β o rovnicích $\alpha: x - 3y + 2z + 4 = 0$ a $\beta: 2x + y - 3z - 6 = 0$. Určete obecné rovnice pravoúhlých průmětů přímky p do souřadnicových rovin xz a yz.

$$\left[x - z - 2 = 0, y - z - 2 = 0\right]$$

2. Určete pravoúhlý průmět přímky p: $x = 3 - 5t$, $t \in \mathbf{R}$, do roviny xy.
$y = 4 + 6t$
$z = 6 + 8t$

$$\left[\begin{array}{l} p_1: x = 3 - 5r,\ r \in \mathbf{R} \\ \quad y = 4 + 6r \\ \quad z = 0 \end{array}\right]$$

3. Určete kolmý průmět přímky p: $x = 4t$, $t \in \mathbf{R}$, do roviny $\alpha: x - y + 3z + 2 = 0$.
$y = 4 + 3t$
$z = -1 - 2t$

$$\left[\begin{array}{l} p_1: x = -4 - \tfrac{49}{11}r,\ r \in \mathbf{R} \\ \quad y = 1 - \tfrac{28}{11}r \\ \quad z = 1 + \tfrac{7}{11}r \end{array}\right]$$

Řešení:

$$A \equiv p \cap \alpha: \quad 4t - (4 + 3t) + 3 \cdot (-1 - 2t) + 2 = 0$$
$$4t - 4 - 3t - 3 - 6t + 2 = 0$$
$$-5t - 5 = 0$$

© Daniela Bímová

$$-5t = 5$$
$$t = -1$$

A: $x_A = 4\cdot(-1) = -4$
$y_A = 4 + 3\cdot(-1) = 1$
$z_A = -1 - 2\cdot(-1) = 1$

$A\,[-4, 1, 1]$

$P\,[0, 4, -1]$
$\mathbf{n}^\alpha = \mathbf{s}^q = (1, -1, 3)$

q: $x = s$, $\quad s \in \mathbf{R}$
$y = 4 - s$
$z = -1 + 3s$

$Q \equiv Q \cap \alpha$: $\quad s - (4 - s) + 3\cdot(-1 + 3s) + 2 = 0$
$$s - 4 + s - 3 + 9s + 2 = 0$$
$$11s - 5 = 0$$
$$11s = 5$$
$$s = \tfrac{5}{11}$$

Q: $x_Q = \frac{5}{11}$
$y_Q = 4 - \frac{5}{11} = \frac{39}{11}$
$z_Q = -1 + 3\cdot\frac{5}{11} = \frac{4}{11}$

$Q\left[\frac{5}{11}, \frac{39}{11}, \frac{4}{11}\right]$

$\mathbf{QA} = A - Q = \left(-4 - \frac{5}{11}, 1 - \frac{39}{11}, 1 - \frac{4}{11}\right) = \left(-\frac{49}{11}, -\frac{28}{11}, \frac{7}{11}\right)$

p_1: $x = -4 - \frac{49}{11}r$, $r \in \mathbf{R}$
$y = 1 - \frac{28}{11}r$
$z = 1 + \frac{7}{11}r$

4.6.6 Rovina rovnoběžná s přímkou

1. Napište obecnou rovnici roviny, která je tvořena přímkou $q \equiv PQ$, kde $P\,[3, 2, 3]$, $Q\,[-2, 1, 2]$, a která je rovnoběžná s osou y.

2. Určete obecnou rovnici roviny, která je rovnoběžná s přímkou p: $x = 1 + 82t$, $y = 7$, $z = 5 + 79t$, $t \in \mathbf{R}$, a ve které leží přímka q (daná jako průsečnice dvou rovin) $\alpha: 3x - 4y + z - 12 = 0$ a $\beta: 4x - 7y - 3z + 4 = 0$.
$[\rho: 79x - 147y - 82z + 184 = 0]$

© Daniela Bímová

5. Metrické úlohy

5.1 Vzdálenosti bodů, přímek a rovin

5.1.1 Vzdálenost dvou bodů

1. Vypočítejte vzdálenost dvou bodů $A[2,-1,3]$, $B[7,-1,2]$.

5.1.2 Vzdálenost bodu od přímky

1. Vypočítejte vzdálenost daného bodu od dané přímky

a) $A[3,5,1]$, a: $x = 5-2t$, $t \in \mathbf{R}$; $\left[v = 4\sqrt{\tfrac{3}{7}}\right]$
$y = 4+3t$
$z = -2+t$

b) $B[1,0,0]$, b: $x = 2-t$, $t \in \mathbf{R}$; $\left[v = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$
$y = t$
$z = 0$

c) $C[-1,1,2]$, c: $x = 2+t$, $t \in \mathbf{R}$; $\left[v = \tfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}\right]$
$y = 1+t$
$z = -t$

d) $D[2,-1,3]$, d: $x = 1-3t$, $t \in \mathbf{R}$;
$y = -2+4t$
$z = 1+5t$

e) $E[1,2,5]$, e: $x = t$, $t \in \mathbf{R}$; $\left[v = \tfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}\right]$
$y = 1-2t$
$z = 3+t$

f) $F[1,2,3]$, f: $x = 5-t$, $t \in \mathbf{R}$; $[v = 0 \Leftrightarrow F \in f]$
$y = 10-2t$
$z = -1+t$

2. Vypočítejte vzdálenost bodu $M[1,3,5]$ od přímky $p \equiv \rho \cap \sigma$, $\rho: 2x+y+z-1=0$, $\sigma: 3x+y+2z-3=0$. $\left[v = \sqrt{14}\right]$

5.1.3 Vzdálenost bodu od roviny

1. Vypočítejte vzdálenost bodu od roviny

a) $A[5,-2,4]$, $\alpha: x+3y-2z+6=0$ $\left[v = \tfrac{3\sqrt{14}}{14}\right]$

b) $B[1,2,-3]$, $\beta: 2x+3y-4z+5=0$ $[v = 4{,}6]$

c) $C[3,5,-4]$, $\gamma: x+5y-3z+10=0$ $\left[v = \tfrac{50}{\sqrt{35}}\right]$

2. Vypočítejte vzdálenost bodu od roviny, která je určena třemi nekolineárními body

a) $M[3,-1,3]$, $\rho \equiv ABC$: $A[1,10,2]$, $B[-3,5,-1]$, $C[-7,3,-4]$
$\rho: 3x-4z+5=0$ $\left[v = \tfrac{2}{5}\right]$

© Daniela Bímová

b) $M[7,-1,2]$, $\rho \equiv ABC$: $A[-5,0,0]$, $B[0,0,\frac{5}{2}]$, $C[0,-\frac{5}{2},0]$

$[v = 2]$

3. Vypočítejte vzdálenost bodu od roviny, která je dána bodem a přímkou:
   a) $M[-2,3,1]$, $\rho \equiv Ab$: $A[1,2,1]$ a b: $x = 2+3t$, $t \in \mathbf{R}$; $\left[v = \frac{5}{\sqrt{30}}\right]$
   $y = -5-16t$
   $z = -2t$

5.1.4 Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek

1. Vypočítejte vzdálenost dvou rovnoběžných přímek p: $x = 2+7t$, $t \in \mathbf{R}$, a
   $y = -2-2t$
   $z = 5-3t$
   q: $\alpha : x+2y+z = 0$. Na přímce q zvolte bod o souřadnici $x = 2$.
   $\beta : 2x+y+4z-17 = 0$

$\left[v = \sqrt{\frac{99}{62}}\right]$

2. Vypočítejte vzdálenost dvou rovnoběžných přímek
   a) a: $x = 2+t$, b: $x = 2s$, $t, s \in \mathbf{R}$, $\left[v = \sqrt{\frac{72}{11}}\right]$
   $y = 1-3t$ $\quad y = -1-6s$
   $z = 1+t$ $\quad z = 1+2s$

   b) p: $x = 1+t$, q: $x = 2-s$, $t, s \in \mathbf{R}$,
   $y = 2-t$ $\quad y = 2s$
   $z = 3+t$ $\quad z = -12+s$

   c) q: $x = 2+3t$, r: $x = 7+3s$, $t, s \in \mathbf{R}$, $[v = 3]$
   $y = -1+4t$ $\quad y = 1+4s$
   $z = 2t$ $\quad z = 3+2s$

5.1.5 Vzdálenost přímky od rovnoběžné roviny

1. Dokažte, že přímka $p(\alpha,\beta)$: $\alpha : 5x+11y-9z = 167$ je rovnoběžná s rovinou
   $\beta : 5x+7y-3z = 99$
   $\gamma : 2x+4y-3z = 2$, a vypočítejte vzdálenost přímky p od roviny γ

$[v = 2\sqrt{29}]$

2. Vypočítejte vzdálenost přímky p: $x = -2t$, $t \in \mathbf{R}$, od roviny $\rho \equiv ABC$: $A[1,2,0]$,
   $y = 4+t$
   $z = 1-t$
   $B[3,2,3]$, $C[-1,3,-1]$. $[v = 3/\sqrt{29}]$

© Daniela Bímová

5.1.6 Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin

1. Vypočítejte vzdálenost dvou rovnoběžných rovin
   a) $\alpha: 3x - 5y + 4z + 3\sqrt{2} = 0$, $\beta: 3x - 5y + 4z + 12\sqrt{2} = 0$ $\left[v = \frac{9}{5}\right]$
   b) $\gamma: 2x - 4y + 5z - 3 = 0$, $\delta: 2x - 4y + 5z + 6 = 0$ $\left[v = \frac{3\sqrt{5}}{5}\right]$
   c) $\varepsilon: 2x + 5y - 4z + 6 = 0$, $\varphi: 2x + 5y - 4z - 6 = 0$ $\left[v = \frac{4}{\sqrt{5}}\right]$

2. Vypočítejte vzdálenost dvou rovnoběžných rovin $\rho: 4x + 5y + 3z - 30 = 0$ a $\sigma: x = 1 - u - 2v$, $u, v \in \mathbf{R}$.
   $y = 2 - u + v$
   $z = 2 + 3u + v$ $\left[v = \frac{10}{\sqrt{50}} = \sqrt{2}\right]$

3. Ve vzdálenosti $v = 2$ veďte rovinu α rovnoběžnou s rovinou $\beta: x + 2y - 5z = 1$.
   $\left[\alpha_1: 3x - 5y + 4z + 2\sqrt{30} + 1 = 0, \alpha_2: 3x - 5y + 4z - 2\sqrt{30} + 1 = 0\right]$

5.1.7 Vzdálenost dvou mimoběžných přímek

1. Vypočítejte vzdálenost mimoběžek a: $x = 2 + 7t$, $t \in \mathbf{R}$, a b: $\alpha: x + 3y - 7z = 0$.
   $y = 1 - 3t$ $\beta: 2x - 4y + z = 0$
   $z = -4 + 2t$

Návod: Přímkou b proložte rovinu rovnoběžnou s přímkou a.

$\left[v = \frac{19\sqrt{18}}{18}\right]$

2. Vypočítejte vzdálenost mimoběžek a: $x = 3 + t$ a b: $x = -u$, $t, u \in \mathbf{R}$.
   $y = 1 - t$ $y = 2 + 3u$
   $z = 2 + 2t$ $z = 3u$

5.2 Odchylky přímek a rovin

5.2.1 Odchylka dvou přímek

1. Vypočtěte odchylku φ přímek
   a) a: $x = 1 + 3t$ a b: $x = 2u$, $t, u \in \mathbf{R}$
   $y = -2 + 6t$ $y = 3 + 9u$
   $z = 5 + 2t$ $z = -1 + 6u$ $\left[\varphi = \arccos \frac{72}{77} = 23°\right]$

   b) p: $x = 2 - 2t$ a q: $x = 2$, $t, s \in \mathbf{R}$
   $y = 1 + 3t$ $y = 1 + s$
   $z = 1 - t$ $z = 1 - s$ $\left[\cos \varphi = \frac{2\sqrt{7}}{7}\right]$

2. Vypočítejte odchylku φ přímek

© Daniela Bímová

a) $a: t = \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-5}{-5} = \dfrac{z-1}{4}$, b: $x = -3 + 2s$, $t, s \in \mathbf{R}$.

$y = 6 + s$

$z = -5 - 2s$ $\qquad [\varphi = 70° \, 43' \, 56'']$

b) $p: t = \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-5}{-5} = \dfrac{z-1}{4}$, q: $x = 2 - 3s$, $t, s \in \mathbf{R}$.

$y = 1 + 6s$

$z = -2 - 5s$ $\qquad [\varphi = 4° \, 13' \,]$

5.2.2 Odchylka dvou rovin

1. Určete odchylku rovin
   a) $\alpha: 2x - y + z - 1 = 0$, $\beta: x + y + 2z + 3 = 0$ $\qquad [\varphi = 60°]$
   b) $\gamma: x - 2y + 2z = 0$, $\delta: x + z - 6 = 0$ $\qquad [\varphi = 45°]$
   c) $\kappa: 3x + 2y - 4z - 2 = 0$, $\lambda: 5x - 2y + 2z - 4 = 0$ $\qquad [\varphi = 84° \, 26' \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{957}}]$
   d) $\rho: 2x + 2y - z + 5 = 0$, $\sigma: x - 3y + z + 1 = 0$ $\qquad [\varphi = 59{,}8° \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{5\sqrt{11}}{33}]$
   e) $\alpha: x + 2y - 3z = 0$, $\beta: 2x + 3y + z + 8 = 0$ $\qquad [\varphi = 69° \Leftrightarrow \cos\varphi = \frac{5}{14}]$

2. Určete úhel, který svírají roviny
   a) $\rho: x - 3y + 2z + 1 = 0$, σ: $x = 2 + 2t + s$, $t, s \in \mathbf{R}$

   $y = t - s$

   $z = 1 + 3t$

3. Napište obecnou rovnici roviny α, která je kolmá na rovinu $\beta: 5x - 2y + 5z - 10 = 0$, prochází počátkem souřadnicového systému a svírá s rovinou $\gamma: x - 4y - 8z - 12 = 0$ úhel $\varphi = 45°$.

5.2.3 Odchylka přímky a roviny

1. Určete úhel φ, který svírá daná přímka s danou rovinou:
   a) p: $x = -1 + 2t$, $t \in \mathbf{R}$, $\alpha: 3x - 3y + 2z - 5 = 0$

   $y = 3 + 4t$

   $z = t$ $\qquad [\varphi = 10° \, 43' \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{4}{\sqrt{462}} = 0.186]$

   b) p: $x = 3 - t$, $t \in \mathbf{R}$, $\beta: x - 2y + 2z = 0$

   $y = 3 - 5t$

   $z = -1 + 2t$ $\qquad [\varphi = 52° \, 17' \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{13}{3\sqrt{3}} = 2{,}5]$

   c) p: $x = 1 + t$, $t \in \mathbf{R}$, $\gamma: x + 2y + 2z - 3 = 0$

   $y = 2 + t$

   $z = 3 + t$ $\qquad [\varphi = 74{,}2°]$

   d) p: $t = \frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-1}{4}$, $t \in \mathbf{R}$, $\gamma: 2x - y + z - 1 = 0$

   $[\varphi = 60° \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

© Daniela Bímová

2. Vypočítejte odchylku přímky p: $x = -2 + t$, $t \in \mathbf{R}$, od roviny ρ: $x = 1 - u + 2v$,
$y = 1 - t$ $\quad$ $y = 4 - 2u - 2v$
$z = 3t$ $\quad$ $z = 3 + u$
$u, v \in \mathbf{R}$.

$\left[\sin\varphi = \frac{9}{11} \Rightarrow \varphi = 54{,}9°\right]$

3. Vypočítejte odchylku přímky $p(\alpha \cap \beta)$: $\alpha: x + y - 3z + 2 = 0$, $\beta: 2x + y - 4z - 1 = 0$ od souřadnicové roviny xz.

$\left[\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \varphi = 54{,}74°\right]$

4. V kvádru $ABCDEFGH$, kde $D[0, 0, 0]$, $A[2, 0, 0]$ a $B[2, 3, 0]$, je bod P středem hrany BF. Určete velikost odchylky přímky PH od roviny $ABEF$, je-li $H[0, 1, 4]$.

5. Napište obecnou rovnici roviny ρ, která prochází přímkou p: $x = -3 - 3t$, $t \in \mathbf{R}$,
$y = 4 + t$
$z = -2 + t$
a se souřadnicovou osou y svírá úhel 45°.

$[\rho_1: y - z - 6 = 0, \rho_2: 3x + 5y + 4z - 3 = 0]$

6. Bodem $A[2, 5, 9]$ sestrojte přímku p, která svírá s rovinou γ: $4x + \sqrt{11}y + 3z = 0$ úhel 30° a protíná přímku q: $x = 5 + 2t$, $t \in \mathbf{R}$.
$y = 5$
$z = 11 - t$

$$\left[\begin{array}{l} p: \ x = 2, \quad t \in \mathbf{R} \\ \quad y = 5 \\ \quad z = \frac{25}{2} - \frac{7}{2}t \end{array}\right]$$

7. Napište obecnou rovnici roviny τ, která je kolmá na rovinu $\beta: 5x - 2y + 5z - 10 = 0$, prochází počátkem souřadnicového systému a svírá s rovinou $\gamma: x - 4y - 8z - 12 = 0$ úhel $\varphi = 45°$.

$[\tau_1: x - z = 0, \tau_2: x + 20y + 7z = 0]$

© Daniela Bímová