4. DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRIE KŘIVEK

4.1 Vektorová funkce jedné reálné proměnné

Úloha 4.1:

Určete definiční obor dané vektorové funkce $\mathbf{r}(t) = \left(\cos t + \sin t, t, \sqrt{t}\right)$.

$$\left[D(\mathbf{r}(t)) = \langle 0, +\infty)\right]$$

Úloha 4.2:

Určete první derivaci vektorové funkce

a) $\mathbf{r}(t) = \left(\mathrm{e}^{t}, \mathrm{e}^{-t}, t\sqrt{2}\right)$ $\quad \left[\mathbf{r}'(t) = \left(\mathrm{e}^{t}, -\mathrm{e}^{-t}, \sqrt{2}\right)\right]$

b) $\mathbf{r}(t) = \left(\ln \frac{1}{1+t^2}, \sqrt{t}, \operatorname{tg} t^2\right)$ $\quad \left[\mathbf{r}'(t) = \left(-\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1}{2\cdot\sqrt{t}}, \frac{2t}{\cos^2 t^2}\right)\right]$

c) $\mathbf{r}(t) = \left(\operatorname{tg}^2 t, \sqrt{2t}, \ln t^2\right)$ $\quad \left[\mathbf{r}'(t) = \left(2\operatorname{tg} t \cdot \frac{1}{\cos^2 t}, \frac{1}{2\cdot\sqrt{2t}} \cdot 2, \frac{2t}{t^2}\right) = \left(\frac{2\cdot\sin t}{\cos^3 t}, \frac{1}{\sqrt{2t}}, \frac{2}{t}\right)\right]$

d) $\mathbf{r}(t) = \left(\mathrm{e}^{2t}, \frac{1}{t^2}, \cos^3 t\right)$ $\quad \left[\mathbf{r}'(t) = \left(2\mathrm{e}^{2t}, -2\cdot\frac{1}{t^3}, -3\cdot\cos^2 t\cdot\sin t\right)\right]$

Úloha 4.3:

Určete hodnotu první derivace vektorové funkce

a) $\mathbf{r}(t) = \left(t, \frac{t^2}{24}, \frac{t^3}{30}\right)$ v bodě $t_0 = 2$ $\quad \left[\mathbf{r}'(2) = \left(1, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}\right)\right]$

b) $\mathbf{r}(t) = \left(t^2, \frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}\right)$ v bodě $t_0 = -1$ $\quad \left[\mathbf{r}'(-1) = (-2, -1, 2)\right]$

c) $\mathbf{r}(t) = \left(\ln t^2, 1+\frac{1}{t}, \operatorname{arctg} t\right)$ v bodě $t_0 = -1$ $\quad \left[\mathbf{r}'(-1) = \left(-2, -1, \frac{1}{2}\right)\right]$

d) $\mathbf{r}(t) = (3\cdot\cos t, 3\cdot\sin t, 4t)$ v bodě $t_0 = \frac{\pi}{4}$ $\quad \left[\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 4\right)\right]$

e) $\mathbf{r}(t) = \left(at, \frac{1}{2}at^2, \frac{1}{3}at^3\right)$ v bodě $t_0 = 6$ $\quad \left[\mathbf{r}'(6) = (a, 6a, 36a)\right]$

Úloha 4.4:

Je dána vektorová funkce $\mathbf{r}(t) = \left(3t^2 + 1, 3\cdot\cos^2 t - \cos^3 t, \ln^3 t^3\right)$. Určete její druhou derivaci.

$$\left[\mathbf{r}'(t) = \left(6t, -6\cos t\cdot\sin t + 3\cos^2 t\cdot\sin t, \frac{9}{t}\cdot\ln^2 t^3\right)\right]$$

$$\left[\mathbf{r}''(t) = \left(6, 6\sin^2 t - 6\cos^2 t - 6\cos t\cdot\sin^2 t + 3\cos^3 t, \frac{54}{t^2}\cdot\ln t^3 - \frac{9}{t^2}\ln^2 t^3\right)\right]$$

Úloha 4.5:

Určete třetí derivaci vektorové funkce $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, kde $a, b \in \mathrm{R}$, v bodě $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\left[\mathbf{r}'''(t) = (a\sin t, -a\cos t, 0),\ \mathbf{r}'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (a, 0, 0)\right]$$

4.2 Parametrické a vektorové rovnice křivek v E_3

Úloha 4.6:

Vektorovou funkcí zapište:

a) přímku q: $x = 3 + 2t$, $y = -2 - 7t$, $z = 6 - 9t$ $\quad [\mathbf{r}(t) = (3 + 2t, -2 - 7t, 6 - 9t)]$

b) kružnici k: $x = 5 \cdot \cos t$, $y = 5 \cdot \sin t$, $z = 4$ $\quad [\mathbf{r}(t) = (5\cos t, 5\sin t, 4)]$

c) elipsu e: $x = 2 \cdot \cos t$, $y = 3 \cdot \sin t$, $z = 0$ $\quad [\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 3\sin t, 0)]$

d) asteroidu a: $x = 4 \cdot \cos^3 t$, $y = 4 \cdot \sin^3 t$, $z = 0$ $\quad [\mathbf{r}(t) = (4 \cdot \cos^3 t, 4 \cdot \sin^3 t, 0)]$

e) šroubovici s: $x = 15 \cdot \cos t$, $y = 15 \cdot \sin t$, $z = 5t$ $\quad [\mathbf{r}(t) = (15 \cdot \cos t, 15 \cdot \sin t, 5t)]$

f) parabolu p: $y = x^2 - 4x + 5$ $\quad [\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 4t + 5, 0)]$

g) sinusoidu: $y = \sin \frac{t}{3}$ $\quad [\mathbf{r}(t) = (t, \sin \frac{t}{3}, 0)]$

4.3 Klasifikace křivek

Úloha 4.7:

Určete, které křivky z příkladu 4.6 jsou
a) otevřenými × uzavřenými křivkami,
b) rovinnými × prostorovými křivkami.

4.4 Klasifikace bodů křivek

Úloha 4.8:

Určete singulární body křivky $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \cdot \sin t, \sin t - t \cdot \cos t, 0)$.

$[S[1, 0, 0]]$

Úloha 4.9:

Určete singulární body křivky (asteroidy) $\mathbf{r}(t) = (2\cos^3 t, 2\sin^3 t, 0)$.

$[t = 0 \ldots S_1\,[2, 0, 0],\ t = 1 \ldots S_2\,[0, 2, 0],\ t = 1 \ldots S_2\,[0, 2, 0],\ t = 3 \ldots S_4\,[0, -2, 0]]$

Úloha 4.10:

Určete singulární body křivky (cykloidy) $\mathbf{r}(t) = (a \cdot (t - \sin t), a \cdot (1 - \cos t), 0), a \neq 0$.

$[k = 0 \quad \dots \quad t = 0 \quad \dots \quad S_1\,[0, 0, 0]$

$k = 1 \quad \dots \quad t = 2\pi \quad \dots \quad S_2\,[2a\pi, 0, 0]$

$k = 2 \quad \dots \quad t = 4\pi \quad \dots \quad S_2\,[4a\pi, 0, 0]]$

Úloha 4.11:

Křivka je dána svou vektorovou rovnicí $\mathbf{r}(t) = (t^5, t^4 - t, 0)$.

a) Dokažte, že všechny její body jsou regulární.

b) Rozhodněte, zda jsou body M (0), N (1) inflexní.

$[a)\ \mathbf{r}'(t) = (5t^4, 4t^3 - 1, 0) \neq (0, 0, 0)$, b) $M\,(0)$, $N\,(1)$ jsou inflexní body]

Úloha 4.12:

Najděte inflexní body křivky

a) $x = t, y = t^3, z = 0$

b) $y = 3 \cdot \sin(2x - 1)$

c) $\mathbf{r}\,(t) = (t, 2 + \mathrm{tg}\,(t + 1), -1)$

d) $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{i} \cdot \ln t + \mathbf{j} \cdot (1 - t) + \mathbf{k} \cdot \frac{1}{2} t^2$

e) $\mathbf{r}\,(t) = (\sin t, -\cos t, \sin t - \cos t)$

4.5 Tečna křivky v jejím regulárním bodě

Úloha 4.13:

Napište parametrickou rovnici tečny t ke křivce $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ v jejím regulárním bodě t_0:

a) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 2t + 3, 0)$, $t_0 = 3$

b) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (3 \cdot \cos t, 3 \cdot \sin t, 0)$, $t_0 = 0$

c) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (3 \cdot \cos t, 3 \cdot \sin t, 0)$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$

d) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t^2, t, t^4)$, $t_0 = 1$

e) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t, 1 - t, 2t)$, $t_0 = 0$

4.6 Průvodní trojhran křivky

Úloha 4.14:

Určete směrové vektory průvodního trojhranu křivky $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ v bodě t_0:

a) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (1 - \sin t, \cos t, t)$, $t_0 = 0$

b) $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t^2, \ln t, t^3)$, $t_0 = 1$

Úloha 4.15:

Určete směrové vektory průvodního trojhranu křivky $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t \cdot \sin t, t \cdot \cos t, t \cdot \mathrm{e}^t)$ v počátku soustavy souřadnic $P\,[0, 0, 0]$.

Úloha 4.16:

Určete jednotkové směrové vektory průvodního trojhranu křivky $\mathbf{r}(t) = \left(\sin t, 1 - \cos t, 4 \cdot \sin \frac{t}{2}\right)$ v bodě $t_0 = 0$.

Úloha 4.17:

Určete jednotkové směrové vektory tečny, hlavní normály a binormály křivky $\mathbf{r}(t) = \left(t^2, 1 - t, t^3\right)$ v bodě $M\ [1, 0, 1]$.

Úloha 4.18:

Napište parametrické rovnice tečny, hlavní normály a binormály křivky $\mathbf{r}(t) = \left(t \cdot \cos t, t \cdot \sin t, t\right)$ v počátku souřadnic $P\ [0, 0, 0]$.

Úloha 4.19:

Určete parametrickou rovnici tečny a obecnou rovnici normálové roviny křivky $\mathbf{r}(t) = \left(t^2, t, t^4\right)$ v bodě $t_0 = 1$.

Úloha 4.20:

Určete parametrickou rovnici binormály a obecnou rovnici oskulační roviny křivky $\mathbf{r}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$ v bodě $t_0 = 1$.

Příklad 4.21:
Určete parametrickou rovnici normály a obecnou rovnici rektifikační roviny obyčejné šroubovice $\mathbf{r}(t) = \left(2\cos t, 2\sin t, 5t\right)$ v bodě $t_0 = 0$.

Příklad 4.22:
Určete parametrickou rovnici normály a obecnou rovnici rektifikační roviny šroubovice $\mathbf{r}(t) = \left(2\cos t, 2\sin t, 5t\right)$ v jejím obecném bodě t.

Příklad 4.23:
Určete prvky průvodního trojhranu křivky určené vektorovou funkcí $\mathbf{r}(t) = \left(5\cos t, 5\sin t, 4t\right)$ v bodě M o parametru $t_0 = 0$.

Příklad 4.24:
Určete parametrické rovnice tečny, binormály, hlavní normály a obecné rovnice normálové, oskulační a rektifikační roviny křivky $\mathbf{r}(t) = \left(t^3 - t^2 - 5, 3t^2 + 1, 2t^3 - 16\right)$ v bodě $t_0 = 2$.

Příklad 4.25:
Určete prvky průvodního trojhranu (parametrické rovnice tečny, binormály, hlavní normály a obecné rovnice normálové, oskulační a rektifikační roviny) křivky $\mathbf{r}(t) = \left(t - \sin t, 1 - \cos t, t\right)$ v bodě $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Příklad 4.26:
Určete prvky průvodního trojhranu (parametrické rovnice tečny, binormály, hlavní normály a obecné rovnice normálové, oskulační a rektifikační roviny) křivky $\mathbf{r}(t) = \left(t^2, \ln t, t^3\right)$ v bodě $t_0 = 1$.

Příklad 4.27:
Určete vektor binormály křivky $\mathbf{r}(t)=\left(\mathrm{e}^{t}, \mathrm{e}^{-t}, t\sqrt{2}\right)$ v bodě $t_0=0$ a určete úhly, které svírá s vektory souřadnicové báze.

4.7 Aplikační úlohy

Příklad 4.28:
Vypočítejte odchylku normálové roviny křivky $\mathbf{r}(t)=\left(6t^3+2t^2+7, \ln(4t+1), \mathrm{e}^{t}\right)$ v bodě T ($t_0=0$) od půdorysny.

Příklad 4.29:
Určete odchylku tečny křivky $\mathbf{r}(t)=\left(\sin 2t, \mathrm{e}^{-4t}, \sqrt{t^2+1}\right)$, procházející bodem T ($t_0=0$), od roviny $\alpha: 4x-y+z=0$.

Příklad 4.30:
Je dána křivka $\mathbf{r}(t)=\left(2\mathrm{e}^{t}, 4\cdot\sqrt{t+1}, 3\mathrm{e}^{-t}\right)$. Určete parametrické rovnice tečny křivky v bodě $T\,[2, ?, ?]$ a odchylku tečny od roviny $\alpha: x+y+z=0$.

Příklad 4.31:
Vypočítejte vzdálenost bodu $A\,[5, 2, -5]$ od oskulační roviny křivky $\mathbf{r}(t)=\left(6t^3+2t^2+7, \ln(4t+1), \mathrm{e}^{t}\right)$ v bodě $T\,[?, ?, 1]$.

Příklad 4.32:
Vypočítejte vzdálenost bodu $A\,[5, 2, -5]$ od tečny křivky $\mathbf{r}(t)=\left(t^2+1, \ln(t+1), \mathrm{e}^{-t}\right)$ v bodě $T\,(t_0=0)$.

Příklad 4.33:
Dokažte, že křivka $\mathbf{r}(t)=\left(1-3t, 2t+2, t^2\right)$ je rovinná.

Příklad 4.34:
Dokažte, že křivka daná vektorovou funkcí $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=\left(6+\sin t, 4-\cos t, 2\sin t+3\cos t\right)$, $t\in\langle 0, 2\pi)$ je rovinná a určete obecnou rovnici oskulační roviny, v níž leží.

4.8 Křivost křivky

Příklad 4.35:
Vypočítejte délku oblouku křivky $\mathbf{r}(t)=\left(\mathrm{e}^{t}\cdot\cos t, \mathrm{e}^{t}\cdot\sin t, \mathrm{e}^{t}\right)$ mezi body *A, B* pro hodnoty parametrů $t_0=0$ a $t_1=1$.

Poznámka: Pro výpočet délky oblouku užijte vzorce $s=\int_{t_0}^{t_1}\left|\mathbf{r}'(t)\,\mathrm{d}t\right|$.

Příklad 4.36:

Vypočítejte hodnotu 1. křivosti křivky

a) $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ v bodě $t_0 = 0$

b) $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3)$ v bodě $t_0 = 1$

c) $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2}t^2, t, \frac{1}{4}t^4)$ v bodě $t_0 = -1$

d) $\mathbf{r}(t) = (2t, \ln t, t^2)$ v bodě $t_0 = 1$

e) $\mathbf{r}(t) = (2t, \ln t, t^2)$ v obecném bodě t

f) $\mathbf{r}(t) = (t^2, \mathrm{e}^t, \cos t)$ v bodě $t_0 = 0$

g) $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, \sqrt{2})$ v bodě $t_0 = 0$

h) $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, t\sqrt{2})$ v bodě $t_0 = 0$

i) $\mathbf{r}(t) = (t^2, \mathrm{e}^t, \cos t)$ v bodě $t_0 = 0$

j) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ v bodě $t_0 = 0$

k) $\mathbf{r}(t) = (\mathrm{e}^t \cdot \sin t, \mathrm{e}^t \cdot \cos t, \mathrm{e}^t)$ v bodě $t_0 = 0$

4.9 První křivost rovinných křivek a poloměr křivosti

Příklad 4.37:

Vypočítejte hodnotu 1. křivosti a poloměr křivosti paraboly $y = 2x^2 + 4x + 3$ v jejím vrcholu. Určete souřadnice středu oskulační kružnice a zapište implicitní rovnici oskulační kružnice ve vrcholu paraboly.

Příklad 4.38:

Vypočítejte hodnotu 1. křivosti a poloměr křivosti paraboly $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$ v jejím vrcholu. Určete souřadnice středu oskulační kružnice a zapište implicitní rovnici oskulační kružnice ve vrcholu paraboly.

Příklad 4.39:

Vypočítejte hodnotu 1. křivosti a poloměr křivosti ve vrcholu paraboly $y = 5 - 4x - x^2$. Určete souřadnice středu oskulační kružnice a zapište implicitní rovnici oskulační kružnice ve vrcholu paraboly.

Příklad 4.40:

Napište implicitní rovnici oskulační kružnice ve vrcholu paraboly $y = 4x - x^2$.

Příklad 4.41:

Napište implicitní rovnici oskulační kružnice křivky $k: y = 4x - x^2$ v bodě $t_0 = 1$.

Příklad 4.42:

a) Je dána elipsa $x = a \cdot \cos t, y = 3 \cdot \sin t, z = 0$. Jaká musí být velikost její poloosy a, jestliže poloměr křivosti v hlavních vrcholech je $\rho = \frac{27}{12}$?

b) Je dána elipsa $x = 4 \cdot \cos t, y = b \cdot \sin t, z = 0$. Jaká musí být velikost její poloosy b, jestliže poloměr křivosti v hlavních vrcholech je $\rho = \frac{27}{12}$?

Příklad 4.43:
Určete velikosti poloos *a, b* elipsy $x = a \cdot \cos t, y = b \cdot \sin t, z = 0$, $t \in \langle 0, 2\pi)$, je-li poloměr oskulační kružnice v jejím vedlejším vrcholu C $\left(t_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ roven 27.

Příklad 4.44:
Ověřte správnost konstrukce oskulačních kružnic v hlavních vrcholech elipsy.

Příklad 4.45:
Určete střed a poloměr oskulační kružnice a napište implicitní rovnici oskulační kružnice

a) sinusoidy $y = \sin x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

b) sinusoidy $y = \sin x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

c) kosinusoidy $y = \cos x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

d) sinusoidy $y = 4 \cdot \sin 2x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

e) exponencionely $y = \mathrm{e}^x$ v jejím průsečíku s osou *y*;

f) logaritmické křivky $y = \ln x$ v jejím průsečíku s osou *x*;

g) křivky $xy = 4$, pro $x \in (0, +\infty)$, v bodě $x_0 = 2$;

h) křivky $y = \frac{1}{1 + x^2}$ v bodě $x_0 = 0$.

U všech podúloh načrtněte obrázek.