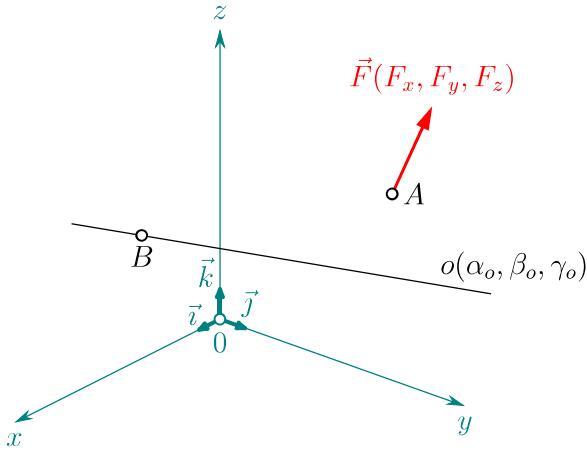


Příklad 2 Síla \vec{F} je dána svými složkami F_x, F_y, F_z . Působí v bodě $A [x_A, y_A, z_A]$. Osa o prochází bodem $B [x_B, y_B, z_B]$ a je skloněná pod směrovými úhly $\alpha_o, \beta_o, \gamma_o$. Vypočtěte moment síly \vec{F} k ose o , je-li dáno: $\vec{F}(60, 80, 100)$ N, $A [2, 8, 7]$ m, $B [7, 3, 6]$ m, $o(108, 18, \gamma_o \leq 90^\circ)$.



Obr. 4

Řešení: Podle níže uvedeného vztahu dopočítáme hodnotu směrového úhlu γ_o osy o , kterou budeme později potřebovat.

$$\cos^2 \alpha_o + \cos^2 \beta_o + \cos^2 \gamma_o = 1,$$

odtud

$$\begin{aligned} \cos \gamma_o &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_o - \cos^2 \beta_o} = \\ &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 108 - \cos^2 18} = 0. \end{aligned}$$

Jelikož z definice je směrový úhel osy uvažován jako dutý, tedy z intervalu $\langle 0, 180 \rangle^\circ$, připadá v úvahu pro $\cos \gamma_o = 0$ jediné možné řešení, a to $\gamma_o = 90^\circ$, což mimochodem znamená, že osa o je rovnoběžná s rovinou (x, y) souřadnicového systému. Nyní můžeme přistoupit k výpočtu momentu síly \vec{F} k ose o .

Nejprve stanovíme moment síly \vec{F} k libovolnému bodu osy o , tedy např. k bodu B . Ramenem síly je zde vektor \vec{r}_{BA} . Podle obr. 5 jej můžeme vyjádřit z vektorové rovnice (3), ve které je jedinou neznámou

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{BA}, \quad (3)$$

$$\vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (x_A - x_B) \vec{i} + (y_A - y_B) \vec{j} + (z_A - z_B) \vec{k}.$$

Moment síly \vec{F} k bodu B tedy je

$$\begin{aligned} \vec{M}_B &= \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} [(y_A - y_B) F_z - (z_A - z_B) F_y] - \vec{j} [(x_A - x_B) F_z - (z_A - z_B) F_x] + \\ &\quad + \vec{k} [(x_A - x_B) F_y - (y_A - y_B) F_x] = \\ &= \vec{i} [(8 - 3) \cdot 100 - (7 - 6) \cdot 80] - \vec{j} [(2 - 7) \cdot 100 - (7 - 6) \cdot (60)] + \\ &\quad + \vec{k} [(2 - 7) \cdot 80 - (8 - 3) \cdot 60] = \\ &= (420 \vec{i} + 560 \vec{j} - 700 \vec{k}) \text{ Nm}. \end{aligned}$$

Vidíme, že moment \vec{M}_B je tedy dán třemi složkami $\vec{M}_{Bx} = 420 \vec{i}$ Nm, $\vec{M}_{By} = 560 \vec{j}$ Nm a $\vec{M}_{Bz} = -700 \vec{k}$ Nm, což jsou jeho průměty do os x, y, z . Složku momentu \vec{M}_B v ose o zjistíme jeho promítnutím do osy o , což provedeme skalárním součinem

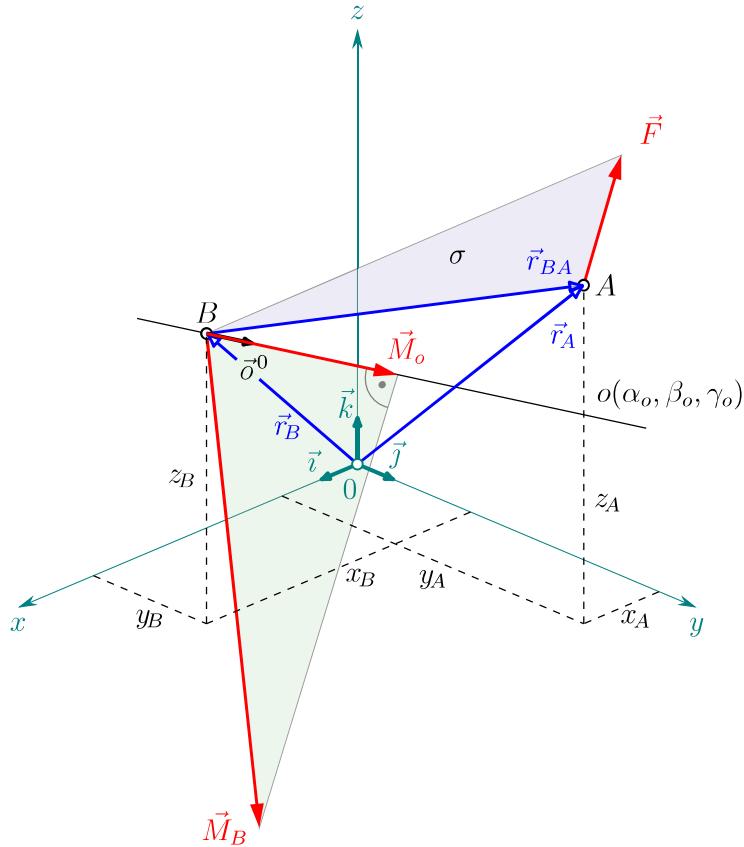
$$M_o = \vec{M}_B \cdot \vec{o}^0, \quad (4)$$

kde \vec{o}^0 je jednotkový vektor osy o . Jeho složky jsou rovny cosinům směrových úhlů osy o , tedy $\vec{o}^0 = \cos \alpha_o \vec{i} + \cos \beta_o \vec{j} + \cos \gamma_o \vec{k}$. Potom

$$\begin{aligned} M_o &= (M_{Bx}, M_{By}, M_{Bz}) \cdot (\cos \alpha_o, \cos \beta_o, \cos \gamma_o) = \\ &= M_{Bx} \cos \alpha_o + M_{By} \cos \beta_o + M_{Bz} \cos \gamma_o = \\ &= 420 \cdot \cos 108 + 560 \cdot \cos 18 - 700 \cdot \cos 90 = 402,80 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

Jelikož moment síly \vec{F} kolem osy o je taktéž vektor a má směr této osy, vytvoříme ze skalární hodnoty M_o vektor tak, že ji přenásobíme jednotkovým vektorem \vec{o}^0 . Skalární hodnota M_o tak získá vektorové vlastnosti jednotkového vektoru \vec{o}^0 . Nulová velikost z -ové složky momentu M_o je opět důsledkem rovnoběžnosti osy o s rovinou (x, y) .

$$\begin{aligned} \vec{M}_o &= M_o \cdot \vec{o}^0 = M_o(\cos \alpha_o \vec{i} + \cos \beta_o \vec{j} + \cos \gamma_o \vec{k}) = \\ &= M_o \cos \alpha_o \vec{i} + M_o \cos \beta_o \vec{j} + M_o \cos \gamma_o \vec{k} = \\ &= 402,80 \cdot \cos 108 \vec{i} + 402,80 \cdot \cos 18 \vec{j} + 402,80 \cdot \cos 90 \vec{k} = \\ &= (-124,47 \vec{i} + 383,09 \vec{j} + 0 \vec{k}) \text{ Nm}. \end{aligned}$$



Obr. 5