KOMBINATORIKA V GEOMETRII? ŽÁDNÝ PROBLÉM.

Jiří Břehovský, Daniela Bímová, Petra Pirklová

Katedra matematiky a didaktiky matematiky, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

Abstrakt: Příspěvek je věnován ukázkám řešení vybraných geometricko-kombinatorických problémů řešených pomocí freewaru GeoGebra. Obě zmíněné oblasti jsou důležitou součástí matematického vzdělávání a i přes to stále sílí tlaky na omezení jim určených časových dotací. V mnoha ohledech jsou oba uvedené celky pro žáky obtížné, ale v získávání matematických kompetencí nemálo důležité. Přitom nabízejí celou řadu možností k účelnému využívání výpočetní techniky jak při jejich výuce, tak při řešení problémů.

Klíčová slova: Geometrie, kombinatorika, geometricko-kombinatorická úloha, GeoGebra.

Combinatorics in geometry? No problem.

Abstract: The paper is devoted to examples of solutions to selected geometric-combinatorial problems solved using GeoGebra freeware. Both of these areas are an important part of mathematics education, and despite this, there is growing pressure to limit the time allowances allocated to them. In many respects, both of these units are difficult for students, but they are very important in acquiring mathematical competencies. At the same time, they offer a wide range of possibilities for the effective use of computer technology both in their teaching and in solving problems.

Key words: Geometry, combinatorics, geometric-combinatorial problem, GeoGebra.

Úvod

Kombinatorika je jedním z nejstarších odvětví diskrétní matematiky, která sahá až do 16. století, kdy hazardní hry hrály klíčovou roli ve společenském životě (Abramovich & Pieper, 1996). Tento zájem podněcoval matematiky k hlubšímu zkoumání jejích principů a k vybudování uceleného matematického aparátu. V současné době je kombinatorika významnou součástí matematických osnov. Jako celek obsahuje bohatou strukturu důležitých principů, které zasahují i do dalších oblastí matematiky (Borovcnik, Peard 1996). Ve své podstatě je řešení kombinatorických úloh vhodné k uplatňování heuristických přístupů. Žáci se tak mohou učit využívat heuristické strategie při řešení problémů. Uplatněním takových způsobů řešení problémů při výuce matematiky dochází také ke zkvalitnění komunikace mezi žáky. (Doulík & all 2016).

Kombinatorika je tak jedním z vhodných nástrojů ke zvyšování matematické gramotnosti a dalších klíčových kompetencí žáků. Proto školskou kombinatoriku chápeme jako podstatnou součást matematické kultury vzdělávání. Důležitost rozvíjet u žáků kombinatorické myšlení byla prokázána celou řadou odborných studií (např. Benson & Jones, 1999; Johnson, Jones, Thornton, Langrall & Rous, 1998; Nisbet et al., 2000; Zimmermann & Jones, 2002). Výsledky těchto studií ukazují na obtíže žáků s řešením úloh, které vyžadují od žáků kombinatorické uvažování. Obdobné závěry ukazují i mezinárodní studie výsledků ve vzdělávání.

O důležitosti geometrie ve výuce matematiky píše již profesor Čech, který ve své metodice věnované výuce geometrie v primě napsal: „Euklidovská geometrie je nejstarší a dosud nepředstižený vzor exaktního badání, takže její studium může přispět ke vzdělání také ve vyšším smyslu než pouhým získáním konkrétních vědomostí.“ (Čech, 1940 - 1941). O téměř padesát let později upozorňuje také profesor Kolář na velmi slabé vědomosti žáků z geometrie, které dává mimo jiné do souvislosti se změnami jejích osnov. Mnoho dalších studií ukazuje, že prostorové uvažování pozitivně souvisí se schopnostmi řešit problémy v matematice a geometrii (Battista, Wheatley & Talsma, 1982; Fennema & Tartre, 1985; Moses, 1977).

Na základě vlastních zkušeností s více jak dvacetiletou výukou povinného předmětu Konstruktivní geometrie určeného pro studenty prvního ročníku bakalářského cyklu studia na Fakultě strojní Technické univerzity v Liberci a na základě výsledků výzkumu, ve kterém jsme testovali geometrické myšlení a prostorovou představivost studentů prvního ročníku bakalářského cyklu studia na Fakultě strojní v rámci Přípravného kurzu v září 2019, docházíme k závěru, že i studenti vysokých škol by měli pokračovat v procvičování prostorového a geometrického myšlení, jakož i v rozvoji jejich kombinatorického myšlení podobně, jako tomu bylo v nižších stupních jejich školní docházky.

V současné době dochází k úpravám a diskuzím nad obsahem matematického vzdělávání v rámci RVP a ke korekcím množství učiva, které bude žákům a studentům ve výuce matematiky předkládáno. Některé oblasti matematiky budou velmi pravděpodobně redukovány. Proto se domníváme, že je více než v jiné době nutné hledat různé možnosti efektivního propojování těch oblastí matematického vzdělávání, které jsou již nyní pro žáky obtížné, časově málo dotované, ale v získávání matematických kompetencí nemálo důležité. Jsme přesvědčeni o tom, že kombinatorika a geometrie jsou právě ty oblasti učiva, které si vyšší pozornost zasluhují.

1 Geometricko-kombinatorické úlohy

Z našeho pohledu jde o úlohy, které svým kontextem vhodně propojují kombinatoriku a geometrii. Takových úloh je celá řada. Některé využívají pouze různé geometrické pojmy nebo prostředí, jako například:

Kolik vlajek skládajících se ze tří vodorovně umístěných shodných obdélníků můžeme vytvořit pomocí pěti různých barev tak, aby se žádná z barev neopakovala?

Jiné vyžadují od řešitele hlubší geometrické znalosti a dovednosti a nutí žáka tyto znalosti a dovednosti používat v jiných oblastech matematiky. Právě takovými úlohami se budeme zabývat v další části textu. Uvedeme několik úloh, které jsou podle nás vhodné právě k propojení kombinatoriky a geometrie a přispívají tak k rozvoji kompetencí žáků v obou zmíněných oblastech matematiky. Půjde vždy o takové příklady, k jejichž úspěšnému vyřešení budou žáci využívat znalosti z obou oblastí. Prezentovat budeme spíše jednodušší úlohy, které jsou také vhodné k seznámení žáků s touto problematikou.

V rámci řešení těchto úloh bychom také u žáků chtěli rozvíjet kompetence týkající se informační gramotnosti, a proto k zadávání a řešení jednotlivých úloh budeme s výhodou využívat program GeoGebra. Tento typ úloh pravidelně zařazujeme při přípravě budoucích učitelů matematiky a jako vhodné úlohy pro opakovací kurz matematiky a geometrie určený pro studenty 1. ročníků TUL. Kromě jiných předností, řešení těchto úloh rozvíjí prostorovou představivost a kombinační myšlení žáků a díky využití GeoGebry je lze účelně využít také při online výuce.

2 Využití GeoGebry

Pro zadávání geometricko-kombinatorických úloh využíváme software GeoGebra, GeoGebra Book a rozhraní GeoGebra Classroom. Tento software používáme jako nástroj, ve kterém lze obě prostředí, geometrii i kombinatoriku, dobře propojit. Zároveň, pokud je to nezbytné, studenty s tímto softwarem seznámíme. Naučíme studenty pracovat v GeoGebře a používat její internetová rozhraní. Ta pak společně využíváme při jejich dalším studiu na Fakultě strojní a na Fakultě přírodovědně-humanitní a pedagogické TUL. K zadávání úkolů studentům v e-learningu využíváme vytvořené studentské verze webového rozhraní GeoGebra Book a následně vygenerované GeoGebra Classroom. V sestavených učitelských verzích webového rozhraní GeoGebra Book prezentujeme a komentujeme řešení buď při kontaktní výuce ve třídách, nebo při online výuce. Při výuce samozřejmě nejprve dochází ke konfrontaci studentských řešení mezi studenty a následně k ukázce modelového řešení připraveného učitelem. Studenti prezentují svá řešení a komentují je. Mohou buď obhajovat nalezená řešení, nebo poukazovat na nedostatky či chyby ostatních. Využití online rozhraní GeoGebra Classroom má ještě jednu výhodu, kterou lze využít jak při kontaktní výuce ve třídě, tak při online výuce. Studenti jsou přihlášeni do online prostředí GeoGebra Classroom pod svými jmény. V tomto rozhraní samostatně řeší problémy a učitel má snadný a okamžitý způsob kontroly řešení každého z nich. Zadané úkoly lze samozřejmě individualizovat a vytvořit tak pro každého žáka jedinečný problém.

Všechna námi vytvořená internetová rozhraní GeoGebra Book a GeoGebra Classroom ve studentských verzích se skládají z dynamických appletů obsahujících texty zadání problémů, resp grafická zadání a volná místa pro jejich řešení. Pokud jsou v internetovém rozhraní dynamických appletů přidány nástroje softwaru GeoGebra, mohou studenti psát, kreslit nebo konstruovat svá řešení přímo do těchto volných ploch.

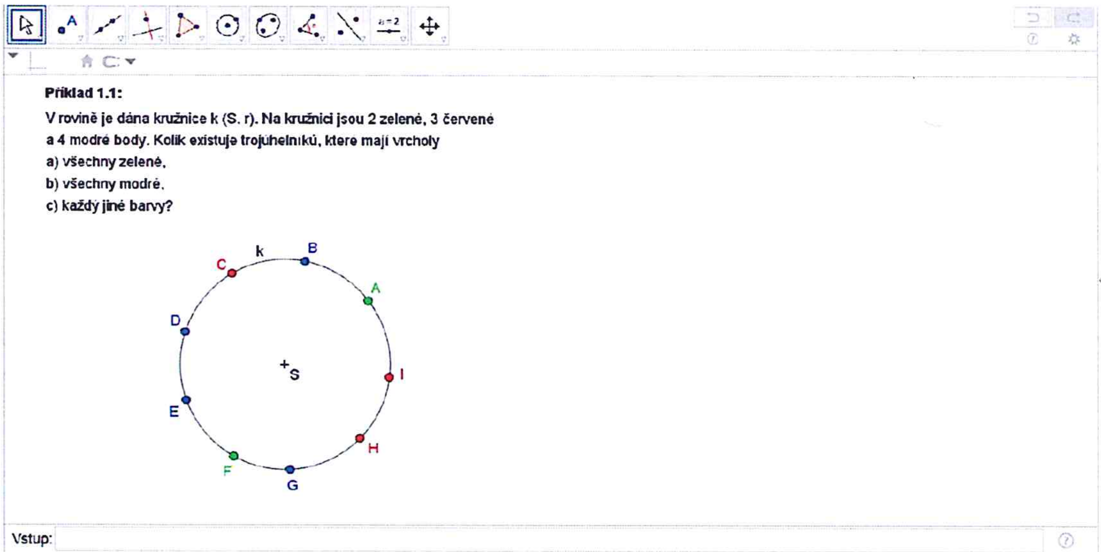
3 Vybrané geometricko-kombinatorické úlohy

V tomto odstavci si představíme úlohy vybraných geometricko-kombinatorických problémů. Ukážeme, jak vypadá rozhraní učitelské verze dynamického GeoGebra appletu pro daný problém a stručně okomentujeme řešení daného problému. Klíčová je pro nás ukázka prostředí, ve kterém výuka probíhá. Cílem je seznámit čtenáře s rozhraním dynamického GeoGebra appletu tak, jak jej studenti vidí ve vytvořené studentské verzi GeoGebra knihy, a nastínit možnosti softwaru GeoGebra pro dynamickou geometrii při prezentaci správných řešení vybraných geometricko-kombinatorických úloh.

3.1 Vrcholy na kružnici

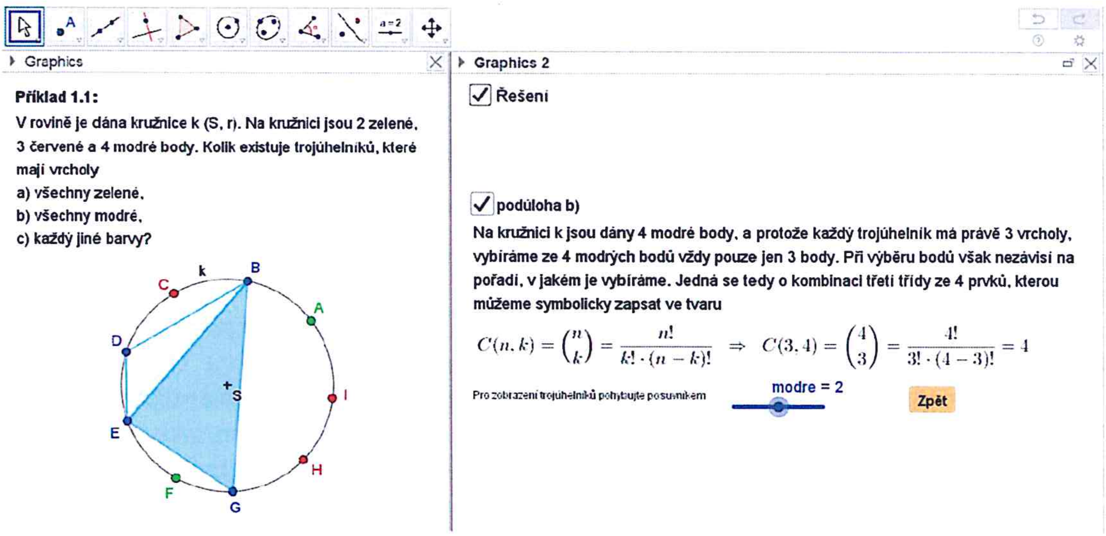
Je dána kružnice $k\ (S, r)$. Na kružnici k jsou dva zelené body, tři červené body a čtyři modré body. Kolik existuje trojúhelníků, které mají vrcholy

a) všechny zelené,
b) všechny modré,
c) každý jiné barvy?



Obrázek 1: Vrcholy na kružnici – studentská verze, zdroj: autor.

Náhled zadané úlohy s názvem „Vrcholy na kružnici“ ve studentské verzi je na obr. 1. Studenti si mohou vyzkoušet použití nástrojů programu GeoGebra při řešení geometricko-kombinatorické úlohy. Náhled části modelového řešení dílčího úkolu b) stejného problému je zobrazen v učitelské verzi dynamického GeoGebra appletu na obr. 2.



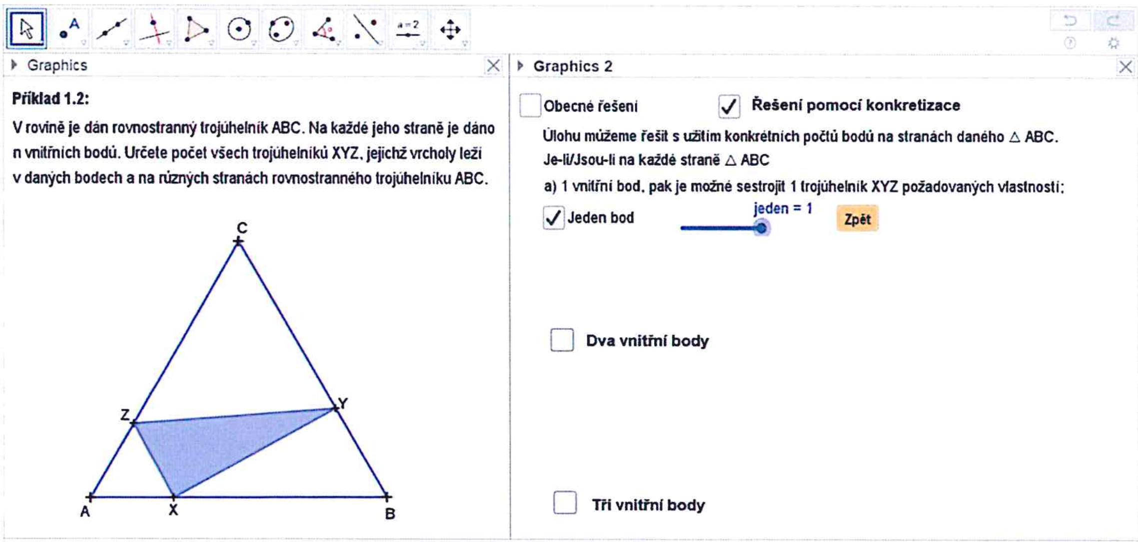
Obrázek 2: Vrcholy na kružnici – učitelská verze, zdroj: autor.

Tento problém zařazujeme jako propedeutiku dvou následujících problémů. Spojuje totiž kombinatoriku a geometrii s podobnými souvislostmi, jaké jsou uvedeny v následujících úlohách (Úlohy 3.2 a 3.3).

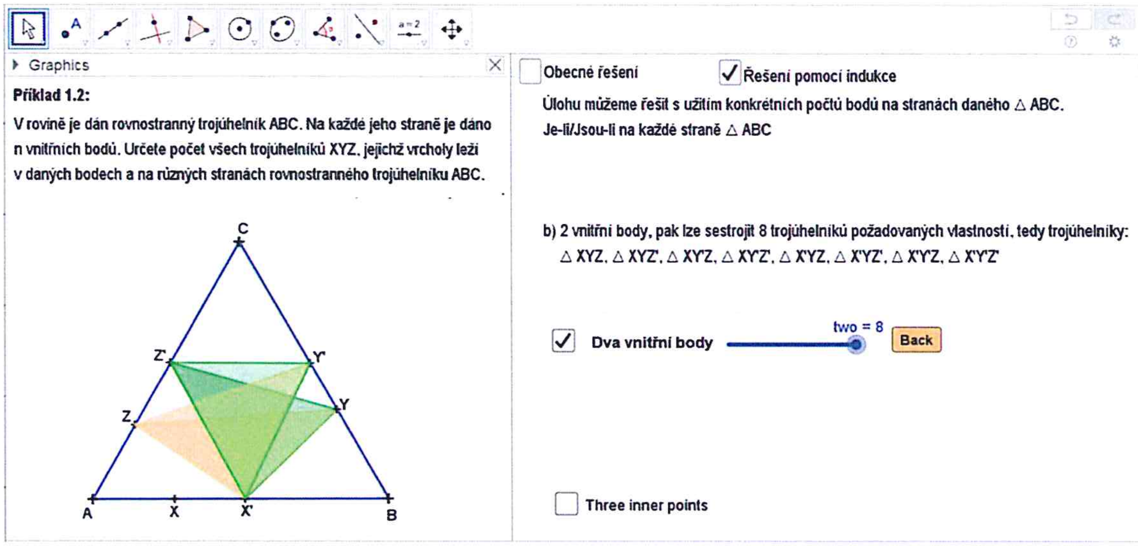
Obě další úlohy (Trojúhelník uvnitř trojúhelníku a Trojúhelník uvnitř čtverce) jsou zadány parametricky s parametrem n, $n \in N$. Úkolem řešitele je zjistit obecný výraz, závisející na parametru n, pro počet geometrických objektů, které lze sestrojit za daných podmínek. V obou případech je vhodné pro řešení problémů použít strategii zvanou „Konkretizace a zobecnění“. Myšlenka této strategie je založena na tom, že v první fázi řešení volíme konkrétní hodnotu, pozici, případně volíme speciální případ zadaného problému. V některých případech je nutné tuto volbu provést vícekrát, ať už proto, že řešitel není přesvědčen o nezávislosti volby konkrétních hodnot, nebo proto, že po jedné volbě nevidí myšlenku řešení. Druhým krokem je návrat k původnímu problému, ve kterém zobecníme konkrétní výsledky. Nezobecňujeme tedy problém, ale získané výsledky.

3.2 Trojúhelník uvnitř trojúhelníku

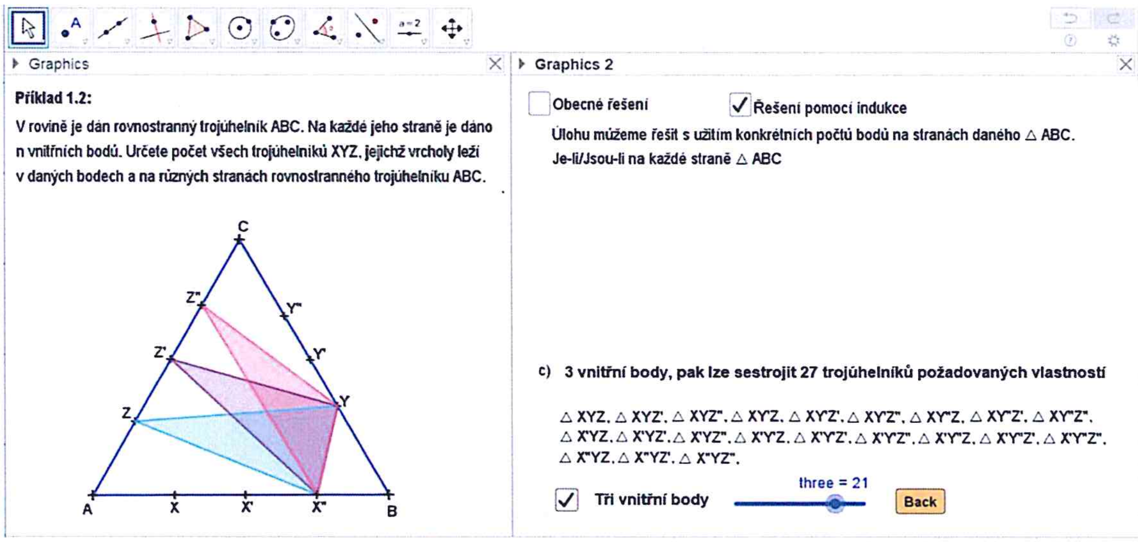
V rovině je dán rovnostranný trojúhelník $\boldsymbol{ABC}$. Na každé straně tohoto trojúhelníku je dáno $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$, vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků $\boldsymbol{XYZ}$, jejichž vrcholy se shodují s danými body a jejichž každý vrchol leží na jiné straně rovnostranného trojúhelníku $\boldsymbol{ABC}$.



Obrázek 3: Trojúhelník uvnitř trojúhelníku – jeden vnitřní bod, učitelská verze, zdroj: autor.



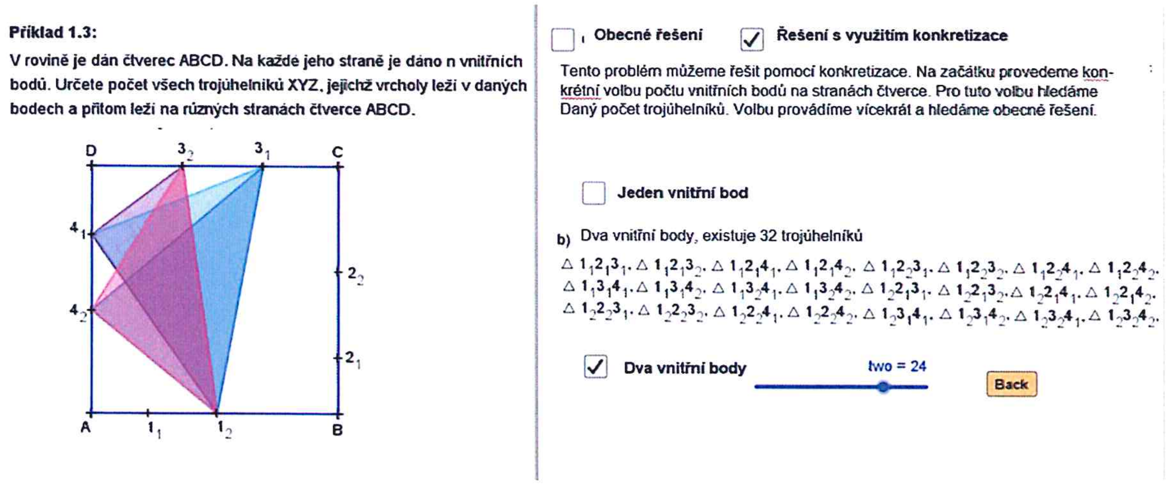
Obrázek 4: Trojúhelník uvnitř trojúhelníku – dva vnitřní body, učitelská verze, zdroj: autor.



Obrázek 5: Trojúhelník uvnitř trojúhelníku – tři vnitřní body, učitelská verze, zdroj: autor.

3.3 Trojúhelník uvnitř čtverce

V rovině je dán čtverec $ABCD$. Na každé straně tohoto čtverce je dáno n, $n \in N$, vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž vrcholy se shodují s danými body a jejichž každý vrchol leží na jiné straně daného čtverce $ABCD$.

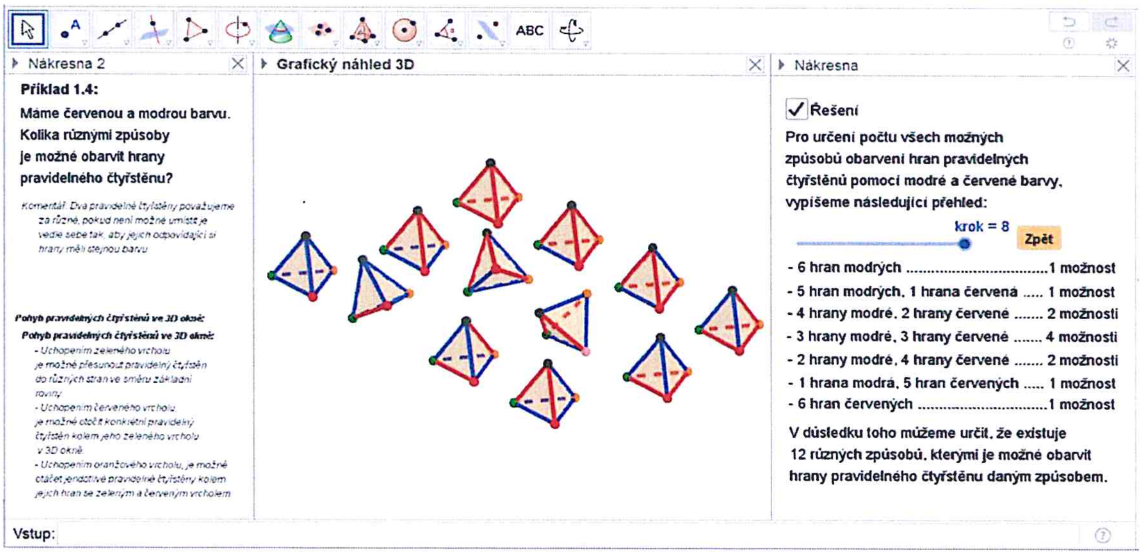


Obrázek 6: Trojúhelník uvnitř čtverce – dva vnitřní body, učitelská verze, zdroj: autor.

Výše uvedené úlohy je možné a vhodné modifikovat. Například z rovnostranného trojúhelníku (úloha 3.2) můžeme vytvořit pravidelný čtyřstěn s n, $n \in N$, vnitřními body na každé z jeho stěn. Nebo ze čtverce (úloha 3.3) můžeme sestavit krychli, na jejíž každé stěně bude n, $n \in N$, vnitřních bodů. Je pouze nutné specifikovat, že na každé stěně pravidelného čtyřstěnu nebo krychle může být pouze jeden vrchol hledaného trojúhelníku. Neuvažujeme tedy situaci, kdy by na jedné stěně, ať už pravidelného čtyřstěnu nebo krychle, měl ležet celý trojúhelník.

3.4 Hrany pravidelného čtyřstěnu

Máme červenou a modrou barvu. Kolika různými způsoby je možné obarvit hrany pravidelného čtyřstěnu? (*Poznámka: Dva modely pravidelného čtyřstěnu považujeme za různé, pokud je nelze umístit vedle sebe tak, aby jejich odpovídající hrany byly stejné barvy.*)



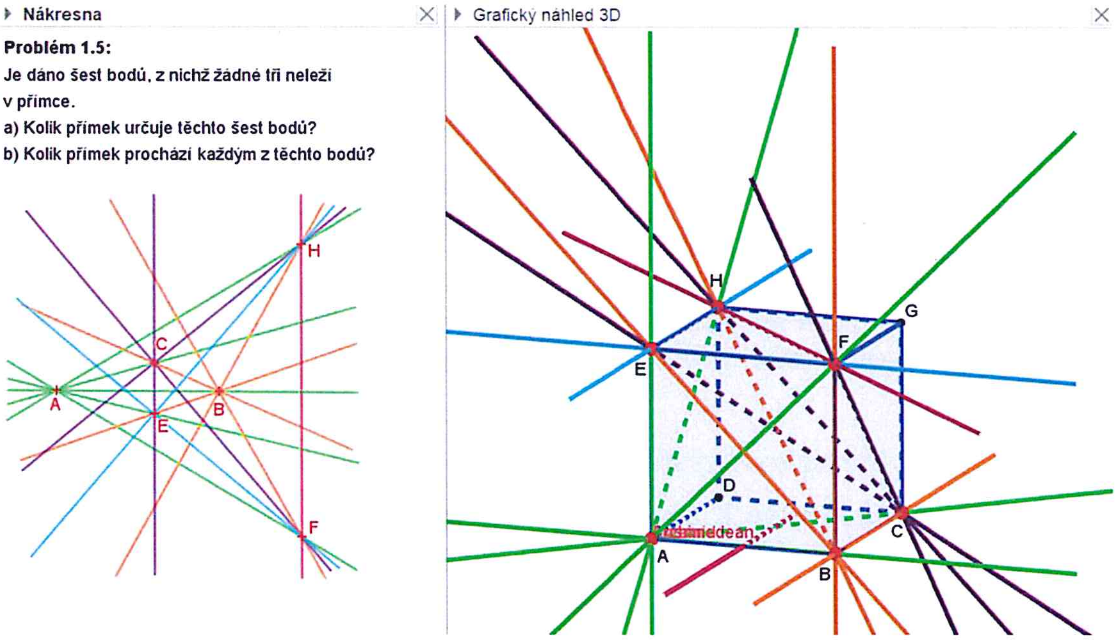
Obrázek 7: Hrany pravidelného čtyřstěnu – ukázka možnosti pohybování se čtyřstěny, učitelská verze, zdroj: autor.

Pro správné vyřešení tohoto problému si musí řešitel uvědomit, jaké zbarvení hran pravidelného čtyřstěnu lze jeho otáčením získat a které nikoliv. Tato skutečnost přímo ovlivňuje počet řešení problému. Pro lepší představu o rotaci pravidelného čtyřstěnu je GeoGebra výborným nástrojem, ať už ve spojení s ukázkou možných řešení ve třídě nebo ve spojení s online výukou.

3.5 Přímky procházející šesti body

Je dáno šest bodů, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce.

a) Kolik přímek určuje těchto šest bodů?
b) Kolik přímek prochází každým z těchto bodů?



Obrázek 8: Přímky procházející šesti body – učitelská verze, zdroj: autor.

Jedná se o neurčitě zadaný problém, jenž nelze řešit bez použití konkretizace, která řešiteli umožní vytvořit si konkrétní představu o zadané situaci. To znamená, že bez pevně stanoveného výběru šesti bodů nejsme schopni tento problém vyřešit. Vyřešení této situace a následné uvědomění si, že počet řešení nezávisí na volbě polohy daných šesti bodů, kromě dané podmínky úlohy, vede k nalezení správného výsledku této úlohy. Tento problém lze řešit buď v rovině, nebo v prostoru. Jedinou nutností je správně zvolit 6 bodů podle dané podmínky. GeoGebra se opět ukazuje jako vhodný nástroj pro modelování a následné řešení tohoto problému.

4 Závěr

V článku jsme popsali několik možností využití internetového rozhraní GeoGebra Book a GeoGebra Classroom jako nástroje pro řešení geometricko-kombinatorických úloh. Software GeoGebra umožňuje efektivní propojení všech zmíněných oblastí: e-learning, online výuka, kombinatorika a geometrie. Volili jsme záměrně jednodušší úlohy, protože jsme primárně chtěli rozvíjet geometricko-kombinatorické myšlení řešitelů. Obě tato témata, kombinatoriku a geometrii, považujeme za velmi důležitá nejen pro studenty všech typů a stupňů škol, ale především pro studenty učitelství matematiky a učitelství pro 1. stupeň základní školy. Své znalosti a dovednosti z geometrie a kombinatoriky mohou poté dále využívat ve své budoucí (kariéře) profesní praxi. Zároveň se domníváme, že je třeba využít každé příležitosti k propojení zdánlivě diferencovaných matematických disciplín. Propojením matematických oborů přispíváme k informovanosti studentů o matematice jako celku. Vytvořené dynamické GeoGebra applety sdílíme s našimi norskými kolegy z naší projektové partnerské NORD University v Bodø.

Poděkování

Tento článek vznikl jako jeden z výstupů projektu iTEM – Improve Teacher Education in Mathematics (Zlepšování výuky učitelů matematiky), EHP-CZ-ICP-2-018. Projekt iTEM je financovaný z fondů EHP 2014 – 2021 program Vzdělávání. Prostřednictvím Fondů EHP přispívají Island, Lichtenštejnsko a Norsko ke snižování ekonomických a sociálních rozdílů v Evropském hospodářském prostoru (EHP) a k posilování spolupráce s 15 evropskými státy.

Literatura:

[1] Abramovich, S., Pieper, A.: *Fostering recursive thinking in combinatorics through the use of manipulatives and computer technology*, The Mathematics Educator, edited by Front Matter (Athens, 1996). Volume 7, Issue 1, pp. 4-12.

[2] Accascina, G., Rogora, E.: *Using Cabri 3d diagrams for teaching geometry*, International Journal For Technology In Mathematics Education, edited by Colin Foster (Loughborough, 2006), pp. 11–22. URL, http://www.miktex.org. ISSN 1744 2710.

[3] Battista, M. T., Wheatley, G. H. and Talsma, G.: *The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in pre-service elementary teachers*, Journal for Research in Mathematics Education, edited by Patricio Herbst (online, 1982), pp. 332–340. ISSN 0021-8251.

[4] Benson, C. T., Jones, G. A.: *Assessing students' thinking in modelling probability contexts*, The Mathematics Educator, edited by Front Matter (Athens, 1999). Volume 4, Issue 2, pp. 1-21.

[5] Borovcnik, M., Peard, R.: *Probability in International Handbook*, Mathematics Education, edited by Arthur Bakker (Dordrecht, Netherlands, 1996). Part 1, pp. 239-288. ISBN 9789401071550.

[6] Clements, D. H.: *Geometric and spatial thinking in young children*, ERIC document ED436232, edited by *ERIC* (Washington, D.C, 1996).

[7] Čech, E.: *Jak vyučovati geometrii v primě*, Pěstování matematiky a fysiky 70, (Praha, 1940 – 1941), pp. 40 – 58.

[8] Deno, J. A.: *The relationship of previous experiences to spatial visualization ability*, Engineering Design Graphics Journal, edited by Nancy Study (Erie, 1995), Volume 59, Issue 3, pp. 5–17.

[9] Doulík, P., Eisenmann, P., Přibyl, J. and Škoda, J.: *Unconventional Ways of Solving Problems in Mathematics Classes*, The New Educational Review, edited by Stanisław Juszczyk (Gliwice, 2016), Vol. 43, No. 1, pp. 53 – 67. ISSN 1732-6729.

[10] Fennema, E., Tartre, L.: *The use of spatial visualization in mathematics by boys and girls*, Journal for Research in Mathematics Education, edited by Patricio Herbst (online, 1985), Volume 16, Issue 3, pp. 184–206.

[11] Jeřábek, J. a kol.: Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Praha 2017.

[12] Johnson, T. M., Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W. and Rous, A.: *Students' thinking and writing in the context of probability*, Written Communication, edited by Biddulph, F. & Carr, K. (University of Waikato Printery, Rotorlla, 1998). Volume 15, Issue 2, pp. 203-229.

[13] Kapur, J. N.: *Combinatorial Analysis and School Mathematics*, Educational Studies in Mathematics 3, edited by Arthur Bakker, David Wagner (online, 1970), pp. 111-127.

[14] Moses, B. E.: *The nature of spatial ability and its relationship to mathematical problem solving*, Dissertation thesis, edited by B. E. Moses (Indiana University, 1997), 38, 8, 4640A. (University Microfilms No. AAG7730309).

[15] Nisbet, S., Jones, G. A., Langrall, C. W. and Thornton, C. A.: *A dicey strategy to get your M & Ms*, Australian Primary Mathematics Classroom, (Australian Association of Mathematics Teachers Inc, Adelaide, 2000). Volume 5, Issue 3, pp 19-22.

[16] Smith, G. G., Gerretson, H., Olkun, S., Yuan, Y., Dogbey, J. and Erdem, A.: *Stills, not full motion, for interactive spatial training: American, Turkish and Taiwanese female pre-service teachers learn spatial visualization*, Computers & Education, edited by S. Bennett (online, 2009), Volume 52, Issue 1, pp. 201–209.

[17] Zimmermann, G. M., Jones, G. A.: *Probability simulation: What meaning does it have for high school students?*, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, (Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, Toronto, 2002). Volume 2, Issue 2, pp 221-236.

Mgr. Jiří Břehovský, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky FP TUL
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 17, Liberec 1
jiri.brehovsky@tul.cz

Mgr. Daniela Bímová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky FP TUL
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 17, Liberec 1
daniela.bimova@tul.cz

Mgr. Petra Pirklová, Ph.D.
Katedra matematiky a didaktiky matematiky FP TUL
Univerzitní náměstí 1410/1, 460 17, Liberec 1
petra.pirklova@tul.cz