

MATHEMATIKUS – PROSTŘEDEK PRO ZDOKONALOVÁNÍ PROSTOROVÉ PŘEDSTAVIVOSTI

Petra Pirklová, Daniela Bímová, Jiří Břehovský

Technická univerzita v Liberci, Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická,
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Abstrakt: Prostorová představivost je velice důležitá schopnost každého jedince, a proto je třeba využít k jejímu rozvoji všech dostupných prostředků. V současné době plné digitálních technologií, které nás neustále obklopují a které žáci všech stupňů škol dobře ovládají, lze využít právě jich. Na základě těchto skutečností byla v rámci řešení projektu iTEM vyvinuta webová stránka Mathematikus obsahující interaktivní úlohy podporující rozvoj a zdokonalování prostorové představivosti. Tento příspěvek je věnován představení této stránky.

Klíčová slova: Prostorová představivost, Mathematikus, vizualizace, prostorové úlohy, moderní technologie, mentální rotace.

Mathematikus – medium for improving spatial imagination

Abstract: Spatial imagination is a very important ability of every individual, and therefore it is necessary to use all available instruments for its development. Nowadays, full of digital technologies, which constantly surround us and which are well mastered by students at all levels of schools, it is possible to use them. Based on these facts, the Mathematikus website, containing interactive tasks supporting the development and improvement of spatial imagination, was developed within the iTEM project solution. This paper is dedicated to the introduction of this website.

Key words: Spatial imagination, Mathematikus, visualization, spatial problems, modern technologies, mental rotation.

Úvod

Prostorová představivost je velmi důležitá schopnost každého člověka. Aniž by si to lidé uvědomovali, využívají prostorovou představivost v každodenním životě, např. pokud potřebují najít cestu ve městě, dále při čtení a orientaci na mapách, při parkování vozů, aranžování dekorací v místnosti, rovnání nádobí do myčky a v mnoha jiných případech. Samozřejmě také profese jako architekt, stavař, astronom, lékař, biochemik, biolog, chemik, kartograf, strojní inženýr, hudebník, aj. se neobejdou bez prostorových schopností. Nicméně

každý člověk by měl být schopen rozpoznat polohu a vztahy mezi objekty a porozumět jejich transformacím v prostoru.

Prostorovou představivostí se zabývá mnoho studií a jsou v nich také zmiňovány její důležité součásti. Například ve [4], [8], [11] je poukázáno na to, že schopnosti mentální manipulace, otáčení, ohýbání nebo převracení znázorněného objektu patří mezi jedny z důležitých aspektů inteligence. Olkun v [12] definuje prostorovou představivost jako schopnost vyvolat, otáčet a interpretovat dvou a třídimenzionální objekty v mysli. Linn a Petersen v [9] popisují prostorovou představivost jako symbolickou a neverbální informaci používanou pro popisování, transformování, tvarování a zapamatování objektů. Definují ji pak jako schopnost, která se používá pro reprezentaci, transformaci, generování a vyvolávání symbolických a obrazových informací. Prostorovou představivost klasifikovali pomocí tří faktorů: *mentální otáčení* (schopnost rychlého a přesného mentálního otáčení dvou- nebo třídimenzionálních objektů a schopnost představit si vlastnosti objektu poté, co byl otočen kolem osy o určitý počet úhlových stupňů), *prostorové vnímání* (schopnost identifikovat prostorové vztahy objektu s ohledem na orientaci vlastního těla), *prostorová vizualizace* (schopnost mentální manipulace s komplexní prostorovou informací o objektu, včetně konfigurace jednotlivých jeho součástí). Vizualizace je základním prvkem prostorových dovedností a lze ji použít jako spouštěcí nástroj při učení a výukových činnostech v matematice a geometrii [6]. Použití vizuálně-prostorových zobrazení při řešení geometrických problémů pozitivně koreluje s výkonem při řešení problémů obecně [3], [7], [11].

Vzhledem ke všem zmíněným a mnoha dalším studiím lze prostorovou představivost definovat jako schopnost provádět mentální transformace objektů v prostoru, představit si, jak objekt vypadá při pohledu z různých úhlů, a rozumět tomu, jaký vztah mají objekty a jejich součásti k sobě navzájem.

Mnoho studií ukazuje, že prostorovou představivost lze zdokonalovat a rozvíjet (např. [1], [2]). K procvičování a prohlubování prostorové představivosti, vzhledem k její důležitosti, je jistě třeba využít všech dostupných prostředků. V současné době nás obklopují moderní technologie více než kdykoliv předtím, a proto je jistě žádoucí je také náležitě a smysluplně využívat. Jejich rozvoj je velmi rychlý a tento rozvoj by se také měl odrážet ve výuce, díky čemuž lze přinášet výrazné inovace do výukových hodin. Je však nutné využít takové počítačové výukové prostředí, pomocí něhož by se studenti naučili odpovídajícím dovednostem. Například hraní počítačových her je velmi populární aktivitou mezi čím dál mladšími dětmi. Počítačové hry nemusíme však úzce vnímat pouze jako zábavu, ale můžeme na ně nahlížet také jako na partnera při učení a též jako na nástroj k překonání rozpaků z moderních technologií a k vyrovnaní různých dovedností žáků. Volíme-li vhodné počítačové hry, mohou mít tyto hry a aktivity výraznou výchovnou a edukativní úlohu. Rozličné studie prezentují nadšené názory na vliv digitálních médií na učení, ale také zmiňují důležitost opatrnosti při jejich bezpodmínečném přijímání [5].

Jednou z nepřeberného množství počítačových aktivit podporujících rozvoj prostorové představivosti, kterou chceme v tomto příspěvku představit, je webová stránka [mathematikus.de](http://www.mathematikus.de) [10].

1 Mathematikus

Webová stránka www.mathematikus.de [10] je stránka, která pomocí řešení úloh na ní vložených umožňuje efektivní procvičování prostorové představivosti pro různé věkové

skupiny žáků. K úspěšnému řešení zařazených úloh je třeba používat všechny složky prostorové představivosti, zejména však mentální rotaci a prostorovou vizualizaci. Všechny úlohy zařazené na tuto stránku jsou interaktivní a animované. Díky animaci poskytují úlohy uživateli okamžitou informativní zpětnou vazbu o správnosti jím zvoleného řešení. To znamená, že každý ihned vidí, proč je nebo není jím vybrané řešení úlohy z předložené nabídky správné. Pokud uživatel udělá chybu, může zkousit vybrat jiné řešení bez větší ztráty času anebo bez plýtvání materiálu pro vytvoření dalších fyzických modelů apod. Další nesporou výhodou této webové stránky je, že uživatel může řešení každé úlohy sledovat tolikrát, kolikrát chce a potřebuje, a v neposlední řadě může také při řešení úloh postupovat vlastním tempem.

Nevýhodou však může být, pokud žák nechce přemýšlet o výběru správného řešení, že lze jen bezmyšlenkovitě klikat a čekat, které náhodně vybrané řešení bude správné.

Ačkoliv webová stránka *Mathematikus* byla naprogramována německou firmou, existuje několik jejích jazykových verzí: česká, německá, anglická a norská. Překlad do čínštiny, ruštiny a španělštiny je ve výstavbě.

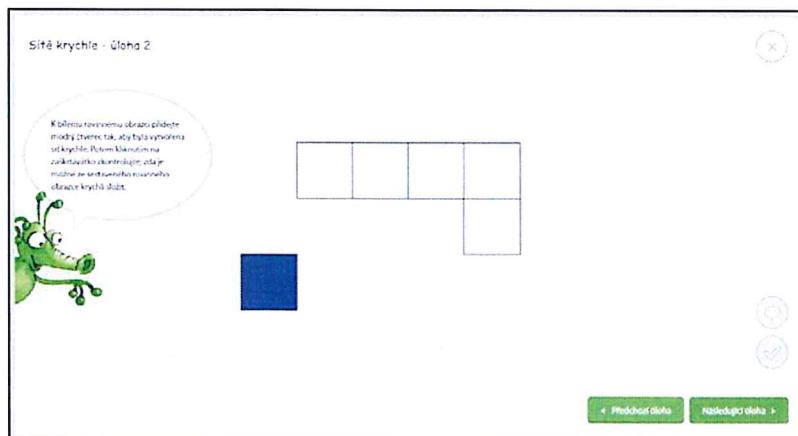
V hlavní nabídce stránky jsou kromě záložek pro úlohy, také technické odkazy na kontakty tvůrců stránky (*Napsat Mathematikusu*) a odkaz, který představuje tuto stránku (*O Mathematikusu*). Dále pod odkazem *Výuka a učení se matematice* jsou zveřejněny německé články vztahující se k tématu výuky matematiky. Odkaz *Tipy pro učení a procvičování* je zatím neobsazen. Úlohy samotné jsou pak rozděleny do dvou skupin s názvy *Krychle, síť krychlí a mnoho dalších úloh* a *Stavění a skládání*.

1.1 Krychle, síť krychlí a mnoho dalších úloh

Pod odkazem *Krychle, síť krychlí a mnoho dalších úloh*, jak už název napovídá, jsou úlohy, které se týkají mentální manipulace s krychlí a krychlovými tělesy. Řešení každé úlohy vybírá uživatel z předložené nabídky. Nyní se krátce zmíníme o jednotlivých typech úloh pod tímto odkazem.

1.1.1 Sítě krychle

Úlohy v odkazu *Sítě krychle* se snaží o seznámení žáka s různými typy sítí krychle. V zadání každé úlohy je „nekompletní síť“ krychle. Úkolem úlohy tohoto typu je přidat předdefinovaný modrý čtverec k této části sítě tak, aby vznikla správná síť krychle (viz Obrázek 1). Ihned po



Obrázek 1: Sítě krychle, zdroj: www.mathematikus.de

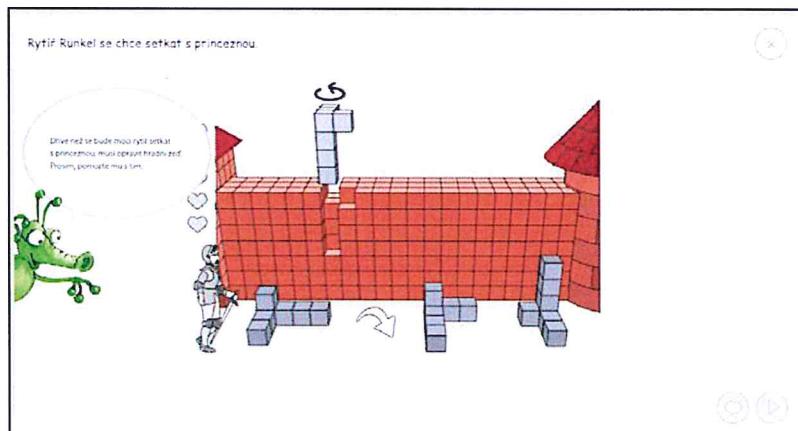
přidání modrého čtverce se vytvořená „sít“ snaží pomocí animace složit v krychli. Okamžitě je ze složeného objektu zřejmé, zda byl modrý čtverec přidán na správné místo či nikoliv. Tedy jestli se přidáním čtverce na zvolené místo podařilo vytvořit síť krychle. Pokud řešení správné není, i tak se síť snaží složit do krychle, ale z výsledného obrázku je patrné, že krychle nevznikla.

1.1.2 Rytíř Runkel

Tato úloha se zabývá procvičováním mentální rotace a prostorové vizualizace. V jejím zadání je uvedeno, že rytíř Runkel se chce dostat za princeznou. Chce-li však za ní dojít, musí opravit hradby, v nichž na pěti místech chybí její části. Pro každou chybějící část hradeb má rytíř na výběr ze čtyř krychlových těles, mezi kterými je to, resp. jsou ta, která přesně zaplní zmínovaný otvor. Z nabízených těles je jich totiž více správných, ta chybná jsou s těmi správnými nepřímo shodná.

Po kliknutí na zvolené krychlové těleso se toto těleso přemístí nad otvor a postupným klikáním na něj se pomocí animace natočí do správné polohy. Tedy je opět ihned vidět, zda je zvolené těleso vhodné. Pokud není správné, pak lze vybrat jiné (viz Obrázek 2).

Pohádkový motiv této úlohy je určen spíše pro děti mladšího školního věku. Pokud je tato úloha řešena ve větší skupině, pak přirozená soutěživost nabádá děti k tomu, aby se snažily najít správné řešení na první pokus, címž se jejich rytíř dostane k princezně co nejdříve.

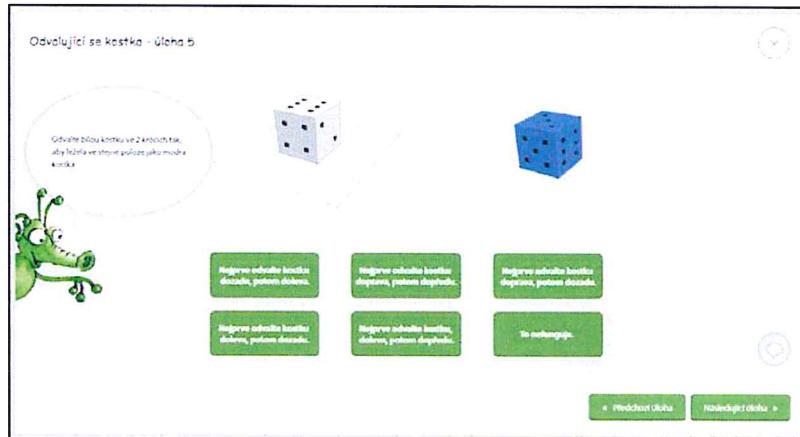


Obrázek 2: Rytíř Runkel, zdroj: www.mathematikus.de

1.1.3 Odvalující se kostka

Pod tímto odkazem jsou velmi známé úlohy na odvalování hrací kostky, ve kterých je třeba pomocí mentální rotace otáčet s kostkou. K úspěšnému řešení je však také nutná znalost faktu, že na protilehlých stěnách hrací kostky je vždy součet bodů roven sedmi, což není v zadání úlohy zmíněno.

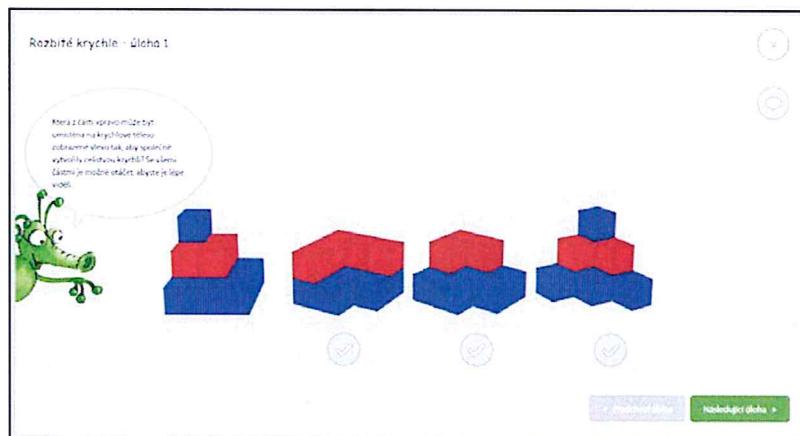
Úkolem uživatele je vybrat z nabídky dvojic pohybů kostky takovou dvojici, která převede bílou kostku do polohy, kterou zaujímá kostka modrá (viz Obrázek 3). Po kliknutí na příslušné tlačítko bílá kostka vybrané pohyby provede a díky virtuální animaci si uživatel může ověřit správnost svého řešení.



Obrázek 3: Odvalující se kostka, zdroj: www.mathematikus.de

1.1.4 Rozbité krychle

V těchto úlohách je třeba z předložených možností tří krychlových těles vybrat takové, které společně s krychlovou stavbou vlevo vytvoří krychli (viz Obrázek 4). Po kliknutí na zvolené krychlové těleso se toto těleso pomocí virtuální animace přemístí ke krychlové stavbě vlevo, aby společně vytvořili celistvou krychli. Díky animaci je zřejmé, jestli jsme byli při volbě úspěšní. Pokud ne, můžeme se poučit z chyb a zvolit vhodnější variantu.

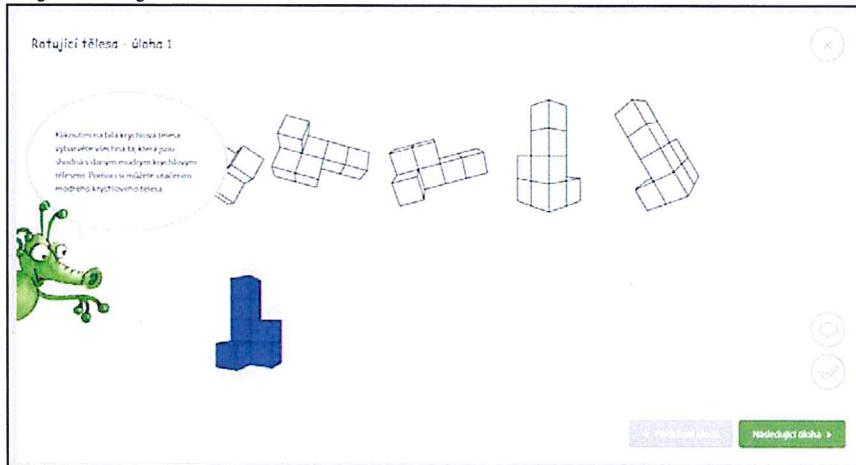


Obrázek 4: Rozbité krychle, zdroj: www.mathematikus.de

1.1.5 Rotující tělesa

Pod odkazem *Rotující tělesa* jsou zařazeny úlohy, ve kterých vybíráme z několika krychlových těles přímo shodná tělesa se zadáným modrým krychlovým tělesem (viz Obrázek 5). Pokud není prostorová představivost uživatele na tak dobré úrovni, aby ihned odhalil sám správné řešení, je možné se zadáným tělesem pomocí myši či prstu na dotykové obrazovce otáčet a

uvést zadané těleso do poloh shodných s nabízenými tělesy. Správných řešení je v těchto úlohách více a je třeba je označit všechna.



Obrázek 5: Rotující tělesa, zdroj: www.mathematikus.de

1.2 Stavění a skládání

Odkaz *Stavění a skládání* z hlavní nabídky obsahuje animované interaktivní návody na skládání různých geometrických objektů, např. dvojjehlanu, pravidelného pětiúhelníku, větrníku, nafukovací krychle, rovnostranného trojúhelníku a mnoha dalších. Postup tvorby jednotlivých skládaček je krokováný. Kroky je možné vracet a pouštět opakováně.

I tyto úlohy, stejně tak jako i všechny výše zmíněné, procvičují prostorovou představivost a určitě mohou dobře posloužit mimo jiné i pro ozvláštnění a odlehčení výukových hodin nejen matematiky.

2 Projekt iTEM

Webová stránka Mathematikus byla původně vyvinuta pomocí platformy Adobe Flash. Po zastarání této platformy byla v roce 2020 přepracována, přeprogramována a rozšířena díky projektu iTEM (Improve Teacher Education in Mathematics). Po těchto jejích úpravách je nyní možné úlohy v Mathematikusu řešit také na dotykových obrazovkách telefonů či tabletů.

Díky projektu iTEM bude stránka Mathematikus i nadále aktualizována a doplňována o nové typy úloh, které by měly být dále diferencované také podle obtížnosti tak, aby si každý uživatel mohl vybrat úlohy podle svých schopností a aby se postupně se tak mohl, díky procvičování, dostat i k těm obtížnějším úloham.

Projekt iTEM je společně řešen na Technické univerzitě v Liberci a NORD University v Bødø v Norsku. Tento projekt je financován z fondů EHP 2014 – 2021, program Vzdělávání. Prostřednictvím fondů EHP přispívají Island, Lichtenštejnsko a Norsko ke snižování ekonomických a sociálních rozdílů v Evropském hospodářském prostoru (EHP) a k posilování spolupráce s patnácti evropskými státy.

Cílem projektu je příprava studentů – budoucích učitelů tak, aby zvládli výzvy vztýkající diverzitu žáků ve třídě a také problémy spojené s používáním digitálních nástrojů při výuce. V rámci své přípravy budou zkoumat vzorky práce žáků s dvourozměrnými animacemi, jako

jsou ty, které nabízí webová stránka Mathematikus, a jejich využití k rozvoji prostorových dovedností žáků.

Dopady projektu v krátkodobém horizontu by se měly projevit ve zkušenostech studentů pedagogických fakult v užívání hardwaru a softwaru jako jsou Mathematikus, GeoGebra, micro:bit, 3D tisk atd. zajímavým a motivujícím způsobem. V dlouhodobém hledisku se očekává, že bude mít projekt pozitivní dopad rovněž na výuku a její výsledky na základních školách v regionech zmíněných zapojených univerzit i mimo ně. Také učitelé, kteří jako studenti byli zapojeni do projektu, budou lépe připraveni vyhovět různým potřebám heterogenních skupin žáků a budou schopni používat software jako nástroj při výuce a tím budou moci obohatit své hodiny a motivovat studenty.

Závěr

V článku je popsána interaktivní webová stránka www.mathematikus.de, která obsahuje úlohy na rozvoj prostorové představivosti. Jak pozorujeme z vlastní praxe i z mnoha studií, existují žáci a studenti, kterým činí potíže vytvořit si správné představy trojrozměrných objektů či prostorových situací ze dvourozměrných obrázků. Proto je třeba prostorovou představivost neustále procvičovat a rozvíjet. Z tohoto důvodu se snažíme hledat vhodné způsoby pomoci těmto žákům, jako je například výše zmíněná webová stránka a animované úlohy umístěné na ní. Pomocí virtuálních animací uživatel ihned pochopí jak jednotlivého úlohy a jejich řešení fungují.

Poděkování:

Tento článek byl vytvořen díky projektu iTEM (Improve Teacher Education in Mathematics), EHP-CZ-ICP-2-018.

Literatura:

- [1] Baenninger M., Newcombe N.: *Environmental input to development of sex-related differences in spatial and mathematical ability*. *Learning and Individual Differences*, 1995 7(4), 363 – 379.
- [2] Baenninger M., Newcombe N.: *The role of experience in spatial last performance a meta analysis*. *Sex roles* 20, 327 – 343, 1989.
- [3] Battista, M. T., Wheatley, G. H., Talsma, G.: *The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in pre-service elementary teachers*. In *Journal for Research in Mathematics Education*, 1982, pp. 332–340. ISSN 0021-8251.
- [4] Carroll, J. B.: *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytic studies*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [5] Connolly T., Stansfield M., Boyle L.: *Games based learning advancements for multi-sensory human computer interfaces: techniques and effective practice*. New York: IGI Global (2009). ISBN 978-1-60566-360-9.

- [6] Cruz, I., Febles, M., Díaz, J.: *Kevin: a visualiser pupil*. In For the Learning of Mathematics, 2000, pp. 30–36.
- [7] van Garderen, D., Montague, M.: *Visual-Spatial Representation, Mathematical Problem Solving, and Students of Varying Abilities*. Learning Disabilities Research & Practice, 18(4), 246–254, 2003. <https://doi.org/10.1111/1540-5826.00079>.
- [8] Gardner, H.: *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York, NY: Basic books, 2011.
- [9] Linn M. C., Peterson A. C.: *Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta analysis*. Child Development, 56, 1479 – 1498 (1985).
- [10] <https://www.mathematikus.de/startseite>
- [11] McGee, M. G. *Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences*. In Psychological Bulletin, 1985, pp. 889–918. ISSN 0021-8251.
- [12] Olkun, S.: *Making connections: Improving spatial abilities with engineering drawing activities*. International Journal of Mathematics Teaching and Learning, 2003 3(1), 1–10.

Petra Pirklová
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec 1
petra.pirklova@tul.cz

Daniela Bímová
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec 1
daniela.bimova@tul.cz

Jiří Břehovský
Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
Studentská 1402/2, 461 17 Liberec 1
jiri.brehovsky@tul.cz