

NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Registrační číslo
uchazeče

--	--	--	--	--	--

Datum zkoušky _____

HODNOCENÍ TESTU: Každý příklad max. 20 bodů.

VZOROVÁ VARIANTA

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

UPOZORNĚNÍ: Není dovoleno používat tabulky ani kalkulačky. U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

ZADÁNÍ:

- Je dána funkce $f : y = 1 - \arcsin 2x$. Vypočtěte:
 - Definiční obor této funkce.
 - Najděte obor, na němž je definována inverzní funkce k funkci f a vypočtěte tuto inverzní funkci.
 - Funkci f derivujte.
- Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ a najděte obor, kde je tento integrál definován.
- Vyřešte v $\mathbb{Z}_7^3$ soustavu lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 3z &= 4 \\ 6x + 3y + z &= 3 \\ 5x + y + 4z &= 0. \end{aligned}$$

Nakreslete řešení (jako body v $\mathbb{Z}_7^3$)!
(Pozn.: $\mathbb{Z}_7^3$ znamená v oboru $\mathbb{Z}$ modulo 7; 3 značí trojrozměrný prostor.)
- Vyřešte v $\mathbb{C}$ algebraickou rovnici $2x^7 + 3x^6 - 7x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 12x^2 = 0$.
Nejprve určete (násobné?) racionální kořeny. Stupeň snižujte Hornerovým algoritmem.
Načrtněte graf polynomu! Nakreslete kořeny v komplexní rovině!
- Určete v prostoru V_5 podprostor totálně kolmý k podprostoru V'_3 , který je generován vektory $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 2, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 0, 3, 1)$.

Př. č.	VÝSLEDKY
1	
2	
3	
4	
5	

ŘEŠENÍ:

1. příklad

$$a) \quad 2x \in \langle -1; 1 \rangle \Leftrightarrow x \in \left\langle \frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\underline{\underline{D(f) = \left\langle \frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right\rangle}}$$

b) inverzní funkce

$$x = 1 - \arcsin 2y$$

$$\arcsin 2y = 1 - x$$

$$2y = \sin(1 - x)$$

$$\underline{\underline{f_{-1} : y = \frac{1}{2} \sin(1 - x)}}$$

def. obor inverzní funkce

$$\underline{\underline{D(f_{-1}) = \left\langle 1 - \frac{\pi}{2}; 1 + \frac{\pi}{2} \right\rangle}}$$

c) derivace

$$\underline{\underline{f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}}}$$

2. příklad

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

$$\underline{\underline{D(f) = \mathbf{R} \setminus \{2; 3\}}}$$

Integrál $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$ řešíme rozkladem na parciální zlomky:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$1 = A(x-3) + B(x-2)$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme

$$0 = A + B$$

$$1 = -3A - 2B$$

odtud $A = -1$

$$B = 1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} &= -\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C = \\ &= \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C, \text{ kde } C \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

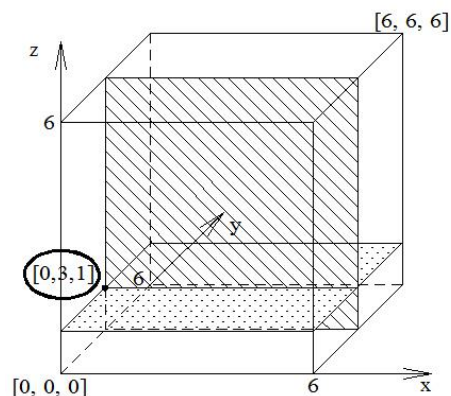
3. příklad

Použijeme Gaussovu eliminační metodu (GEM) v $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{GEM}} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 6y - 5z = 0 \\ y = 6 - 3z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Výsledek:

$$\underline{x = 0, y = 3, z = 1}$$



4. příklad

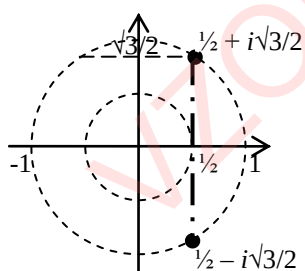
$P_7(x) := (2x^5 + 3x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 8x - 12)x^2 \Rightarrow 0$ je 2násobným kořenem, $x_{1,2} = 0$.

Kandidáti na racionální kořeny jsou $\pm\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}/\{1, 2\} = \pm\{1, 2, 3, 4, 6, 12, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$.

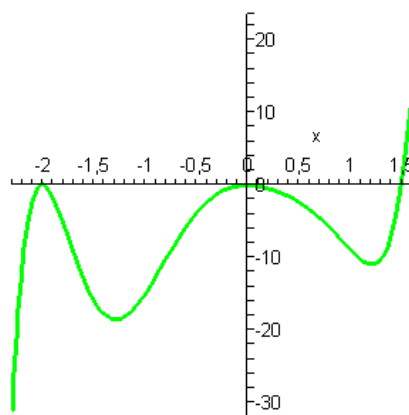
$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \quad -7 \quad -3 \quad 8 \quad -12 \\ -2 \quad \quad -4 \quad 2 \quad 10 \quad -14 \quad 12 \\ \hline 2 \quad -1 \quad -5 \quad 7 \quad -6 \quad 0 \\ -2 \quad \quad -4 \quad 10 \quad -10 \quad 6 \\ \hline 2 \quad -5 \quad 5 \quad -3 \quad 0 \\ -2 \quad \quad -4 \quad 18 \quad -46 \\ \hline 2 \quad -9 \quad 23 \quad -49 < 0 \\ 3/2 \quad \quad 3 \quad -3 \quad 3 \\ \hline 2 \quad -2 \quad 2 \quad 0 \end{array}$	$\Rightarrow \text{Číslo } -2 \text{ je 2násobným kořenem, } x_{3,4} = -2$
$\begin{array}{r} 2 \quad -2 \quad 2 \quad 0 \end{array}$	$\Rightarrow \text{Číslo } 3/2 \text{ je (1nás.) kořenem, } x_5 = 3/2.$

$$2x^2 - 2x + 2 = 0 \quad | :2 \quad (\text{reciprok.} \Rightarrow x_7 = 1/x_6) \quad x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x_{6,7} = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$$

Celkem: množina 7 kořenů = $\{0 \text{ } 2\times; -2 \text{ } 2\times; 3/2; 1/2 \pm i\sqrt{3}/2\}$.



Graf polynomu



pp

5. příklad

Dimenze hledaného podprostoru je $n - k = 5 - 3 = 2$.

Hledáme tedy dva lineárně nezávislé vektory, které jsou kolmé na vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

Předpokládejme, že vektor $\mathbf{x} = (a, b, c, d, e)$ je z hledaného totálně kolmého podprostoru.

Pak podmínka

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

reprezentuje soustavu tří rovnic pro pět neznámých souřadnic vektoru $\mathbf{x}$.

Řešení této soustavy je závislé na 2 parametrech, např.

$$\mathbf{x} = c(11, -1, 1, -3, 0) + e(19, -4, 0, -4, 1) = c \mathbf{u}_1 + e \mathbf{u}_2.$$

Odpověď: Vektory $\mathbf{u}_1 = (11, -1, 1, -3, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (19, -4, 0, -4, 1)$ jsou dva lineárně nezávislé vektory (evidentně $\mathbf{u}_1 \neq k \mathbf{u}_2$, $k \in \mathbf{R}$) a jsou kolmé na vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Tvoří tedy bázi podprostoru $\mathbf{V}_3^\perp$.