TU v Liberci	**Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická**
Přijímací zkoušky z MATEMATIKY pro akademický rok 2013/2014	**KMD FP**

NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Registrační číslo uchazeče

Datum zkoušky ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem**
Body						

Varianta 1

UPOZORNĚNÍ: Není dovoleno používat tabulky ani kalkulačky. U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

ZADÁNÍ:

1. Je dána funkce $f: y = 1 - \ln(3 - x)$.

a) Vypočtěte definiční obor této funkce.
b) Funkci f zderivujte, zjistěte znaménko derivace a monotonii funkce f.
c) Najděte maximální obor, na němž je definována inverzní funkce k funkci f, a vypočtěte tuto inverzní funkci.

2. Pro $x \in (0; +\infty)$ vypočtěte integrál $\int \frac{x-4}{x^3 - 2x^2 + 2x}\,\mathrm{d}x$.

3. Vypočtěte matici $\mathbf{X}$ z rovnice $\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^6$ nad $\mathbb{Z}_7$.

4. Vyřešte v $\mathbf{C}$ algebraickou rovnici $x^7 - 2x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$.

Nejprve určete (násobné?) racionální kořeny. Stupeň snižujte Hornerovým algoritmem. Načrtněte graf polynomu! Nakreslete kořeny v komplexní rovině!

5. Zjistěte průnik úseček $\overline{AB}$, $\overline{CD}$:

$A = [1, 2]$, $B = [3, 0]$,
$C = [2, 1]$, $D = [3, -1]$.

Př. č.	**VÝSLEDKY**
1	
2	
3	
4	
5	

ŘEŠENÍ:

1. Je dána funkce $f: y = 1 - \ln(3-x)$.

   a) Vypočtěte definiční obor této funkce.
   b) Funkci f zderivujte, zjistěte znaménko derivace a monotonii funkce f.
   c) Najděte maximální obor, na němž je definována inverzní funkce k funkci f, a vypočtěte tuto inverzní funkci.

Řešení 1. příkladu:

a) Pro argument logaritmu musí (v **R**) platit: $3 - x > 0$,

tedy $D(f) = (-\infty; 3)$, hodnotový obor je $H(f)$ = **R**.

b) derivace $f'(x) = -\dfrac{-1}{3-x} = \dfrac{1}{3-x}$, $f'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty; 3)$, takže f je rostoucí v $D(f)$.

c) Daná funkce f je prostá na svém definičním oboru, tedy k ní existuje funkce inverzní. Nejprve formálně zaměníme proměnné, abychom dostali funkční předpis ve standardním tvaru (proměnná y v závislosti na proměnné x), pak vyjádříme y v závislosti na x:

$$f_{-1}: x = 1 - \ln(3-y)$$
$$\ln(3-y) = 1 - x$$
$$3 - y = \mathrm{e}^{1-x}$$
$$y = 3 - \mathrm{e}^{1-x}$$

Tedy inverzní funkce k funkci f je rovna $f_{-1}: y = 3 - \mathrm{e}^{1-x}$. Její definiční obor je $D(f_{-1})$ = **R**.

Bodové hodnocení:	definiční obor		5 b.
	derivace		4 b.
	znaménko derivace, monotonie	2+1 =	3 b.
	inverzní funkce		5 b.
	definiční obor inverzní funkce		3 b.

2. Pro $x \in (0; +\infty)$ vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x-4}{x^3 - 2x^2 + 2x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení 2. příkladu:

Pro integraci racionální funkce použijeme rozklad funkce na parciální zlomky. K tomu potřebujeme rozklad polynomu na součin kořenových činitelů:

$$x^3 - 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 2) = 0, \text{ tj. } x = 0 \vee x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Druhá rovnice nemá reálné kořeny (záporný diskriminant, D = -4).

Vzhledem k danému oboru máme rozklad racionální funkce na parciální zlomky:

$$\frac{x-4}{x^3 - 2x^2 + 2x} = \frac{x-4}{x(x^2 - 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 2}$$

Odtud vynásobením (nejmenším společným) jmenovatelem dostáváme vztah:

$$x - 4 = A(x^2 - 2x + 2) + Bx^2 + Cx$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x obdržíme rovnice pro hledané A, B, C:

$$\begin{array}{c|lcl}
x^0 & -4 &=& 2A & \Rightarrow & A=-2 \\
x^1 & 1 &=& -2A+C & \Rightarrow & C=1+2A=-3 \\
x^2 & 0 &=& A+B & \Rightarrow & B=-A=2
\end{array}$$

Odtud $A=-2, B=2, C=-3$, takže.

$$J=\int\frac{x-4}{x^3-2x^2+2x}\,\mathrm{d}x=-2\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\frac{2x-3}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x=$$

⌈doplníme čitatele posledního zlomku na derivaci jmenovatele a kompenzujeme zlomkem⌋

$$=-2\ln x+\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}=$$

⌈poslední jmenovatel doplníme na úplný čtverec: $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$⌋

$$=-2\ln x+\ln(x^2-2x+2)-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+1}=\ \lceil\text{substituce } x-1=t,\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t\ \rfloor=$$

$$=-2\ln x+\ln(x^2-2x+2)-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\ -2\ln x+\ln(x^2-2x+2)-\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\ln\frac{x^2-2x+2}{x^2}-\operatorname{arctg}(x-1)+C,\quad \text{kde } C\in\mathbf{R}$$

Bodové hodnocení:

	obecný rozklad na parciální zlomky	5 b.
	správné vyřešení soustavy	3 b.
	integrování	8 b.
	nezapomenutá konstanta	2 b.
	úprava logaritmu	2 b.

---

3) Vypočtěte matici **X** z rovnice $\mathbf{X}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}^6$ nad $\mathbb{Z}_7$.

Řešení 3. příkladu:

Počítání v $\mathbb{Z}_7$ (tzn. **mod 7**, tj. průběžně redukce na zbytky)

$XA-2B=C^6 \Rightarrow X=(C^6+2B)A^{-1},\ C^6=(C^2)^2\cdot C^2,\ \text{či}\ C^6=(C^3)^2$ ⌊počítáme mod 7⌉

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{bmatrix}^{-1}\equiv_7\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}$$ ⌊matice s podvěšeným sloupcem⌉

$$C^2=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}^2\equiv_7\begin{bmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ C^4=(C^2)^2\equiv_7\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix},\ C^6=C^4\cdot C^2\equiv_7\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ C^3=I$$

$$X=\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&5&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\10&5&0\\9&0&3\end{bmatrix}\equiv_7\begin{bmatrix}6&0&0\\3&5&0\\2&0&3\end{bmatrix}$$

---

4) Vyřešte v **C** algebraickou rovnici $x^7 - 2x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x^3 - 3x^2 = 0$.
Nejprve určete (násobné?) racionální kořeny. Stupeň snižujte Hornerovým algoritmem.
Načrtněte graf polynomu! Nakreslete kořeny v komplexní rovině!

Řešení 4. příkladu:

$$P_7(x) := (x^5 - 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x - 3)x^2 \Rightarrow 0 \text{ je 2násobným kořenem, } x_{1,2} = 0.$$

Kandidáty na *racionální* kořeny jsou $\pm\{1, 3\}$.

	1	-2	-3	1	-2	-3	⇒ Rozklad: $(x^2 - 2x - 3)(x^3 + 1)$.
-1		-1	3	0	-1	3	
	1	-3	0	1	-3	$\boxed{0}$	⇒ Rozklad: $(x - 3)(x^3 + 1)$.
-1		-1	4	-4	3		
	1	-4	4	-3	$\boxed{0}$		⇒ Číslo -1 je 2násobným kořenem, $x_{3,4} = -1$.
~~-1~~		~~-1~~	~~5~~	~~-9~~			
	~~1~~	~~-5~~	~~9~~	~~-12~~	< 0		
3		3	-3	3			
	1	-1	1	$\boxed{0}$			⇒ Číslo 3 je 1násobným kořenem, $x_5 = 3$.

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \lfloor D=-3 \rceil \Rightarrow x_{6,7} = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2, \text{ dvojice komplexně sdružených kořenů.}$$

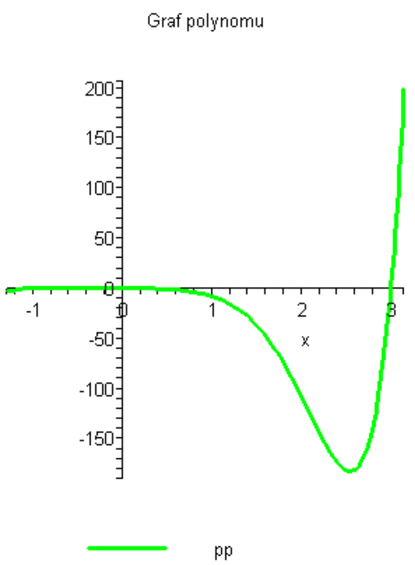
Rychlejší je ovšem využít hned v zadání periodické symetrie koefů k rozkladu

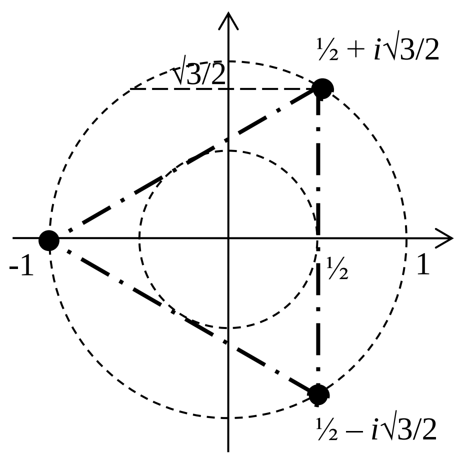
$(x^2 - 2x - 3)(x^3 + 1)$, a odtud pak kořeny $x_{3\text{-}4}$, $x_{6\text{-}8}$.

Celkem:

množina kořenů je $\{-1\ 2\times, 0\ 2\times, 3; 1/2 \pm i\sqrt{3}/2\}$

a rozklad v **R** je $P_7(x) = (x + 1)^2 x^2 (x - 3)(x^2 - x + 1)$





*Licho*násobný kořen je „*průsečík*ový“,
*sudo*násobný kořen je „*dotyk*ový“.   Zde -1 je 2násobný, 0 je 2násobná, 3 je 1násobný.

O směřování grafu polynomu pro „velká“ (kladná, záporná) x
rozhoduje vedoucí člen polynomu (člen s největším mocnitelem).

5. Zjistěte průnik úseček $\overline{AB}$, $\overline{CD}$:

$A = [1, 2]$, $B = [3, 0]$,
$C = [2, 1]$, $D = [3, -1]$.

Řešení 5. příkladu:

Parametrické vyjádření úsečky $\overline{AB}$ je $X = A + t\cdot(B - A)$, kde $t \in \langle 0;1 \rangle$,

parametrické vyjádření úsečky $\overline{CD}$ je $X = C + s\cdot(D - C)$, kde $s \in \langle 0;1 \rangle$.

Předpokládejme, že existuje jejich průsečík R:

$$R = A + t\cdot(B - A) = C + s\cdot(D - C).$$

Pro parametry t a s dostáváme soustavu rovnic (předchozí vztah vyjádřený v souřadnicích zadaných bodů):

$$1 + t\cdot(3 - 1) = 2 + s\cdot(3 - 2)$$
$$2 + t\cdot(0 - 2) = 1 + s\cdot(-1 - 1),$$

tj.

$$2t - s = 1$$
$$-2t + 2s = -1$$

Řešením je $s = 0$ a $t = 1/2$. Řešení vyhovuje podmínkám $t \in \langle 0;1 \rangle$ a $s \in \langle 0;1 \rangle$.

Společný bod obou úseček má souřadnice $[2, 1]$, což je koncový bod C úsečky $\overline{CD}$.

Bodové hodnocení:

parametrické vyjádření úseček	5 b.
podmínky pro parametry	3 b.
sestavení soustavy rovnic pro parametry s, t	5 b.
vyřešení soustavy rovnic	3 b.
ověření podmínek pro parametry	3 b.
výpočet souřadnic průsečíku	1 b.