TU v Liberci	**Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická**
Přijímací zkoušky z MATEMATIKY pro akademický rok 2015/2016	**KMD FP**

NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Registrační číslo uchazeče

Datum zkoušky: ____________________

Příklad	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	***Celkem***
Body						

Varianta 1

UPOZORNĚNÍ: Není dovoleno používat tabulky, kalkulačky, mobily.
U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

ZADÁNÍ:

1. Je dána funkce $f: y = \ln(2x-3)+1$.

a) Vypočtěte definiční obor této funkce.
b) Najděte obor hodnot funkce f.
c) Funkci f zderivujte.
d) Vypočtěte rovnici tečny k dané funkci v bodě dotyku T = [2; 1].
e) Načrtněte graf zadané funkce a vypočtené tečny.

2. Pro $x \in \mathbf{R}$ vypočítejte integrál $\int \frac{4x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$. Určete základní vlastnosti integrované funkce a načrtněte její graf.

3. Vypočtěte matici **X** z rovnice $\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^4$ v $\mathbf{R}$ a nad $\mathbb{Z}_7$.

4. Vyřešte v **C** algebraickou rovnici $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$.
Nejprve určete (násobné?) racionální kořeny. Stupeň snižujte Hornerovým algoritmem.
Načrtněte graf polynomu. Nakreslete kořeny v komplexní rovině.

5. Zjistěte, zda zadaná úsečka $\overline{AB}$ má společné body s rovinou $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$, kde $\overline{AB}$: $A = [-1, -1, 1]$, $B = [0, 0, -6]$. Načrtněte obrázek (úsečka, rovina) v třírozměrném prostoru.

Př. č.	**VÝSLEDKY**
1	
2	
3	
4	
5	

ŘEŠENÍ:

1. Je dána funkce $f: y = \ln(2x-3)+1$.

a) Vypočtěte definiční obor této funkce.
b) Najděte obor hodnot funkce *f*.
c) Funkci f zderivujte.
d) Vypočtěte rovnici tečny k dané funkci v bodě dotyku T = [2; 1].
e) Načrtněte graf zadané funkce a vypočtené tečny.

Řešení:
Pro argument logaritmu platí: 2*x* – 3 > 0, tedy

$$D(f) = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

$$H(f) = \mathbf{R}$$

Derivace: $f'(x) = \dfrac{2}{2x-3}$

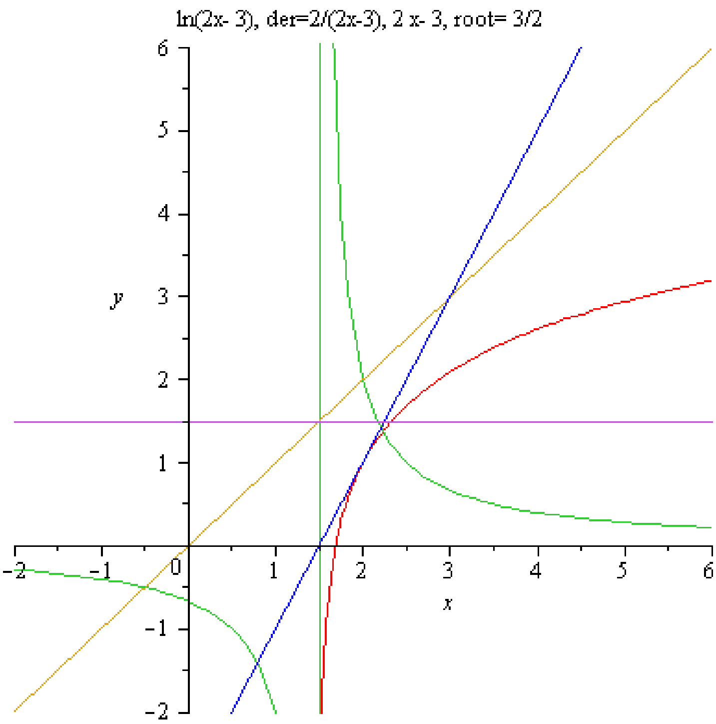
Směrnice tečny je hodnota derivace v x-ové souřadnici bodu dotyku:

$$k = f'(2) = 2 \;,$$

Tečnu hledáme ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$. Dosadíme směrnici k a bod dotyku:

$$1 = 2\cdot 2 + q \text{, odtud } q = -3.$$

Rovnice tečny: $y = 2x-3$.
Grafem funkce $y = \ln(2x-3)+1$ je logaritmická křivka $y = \ln(2x)$
posunutá o 3/2 doprava a 1 nahoru.



Bodové hodnocení:

definiční obor funkce	*3 b*
hodnotový obor funkce	*3 b*
derivace	*3 b*
tečna	*4 b*
graf tečny	*3 b*
náčrt grafu funkce	*4 b*
Suma:	***20 b***

2. Pro $x \in \mathbf{R}$ vypočítejte integrál $\int \frac{4x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$. Určete základní vlastnosti integrované funkce a načrtněte její graf.

Řešení:

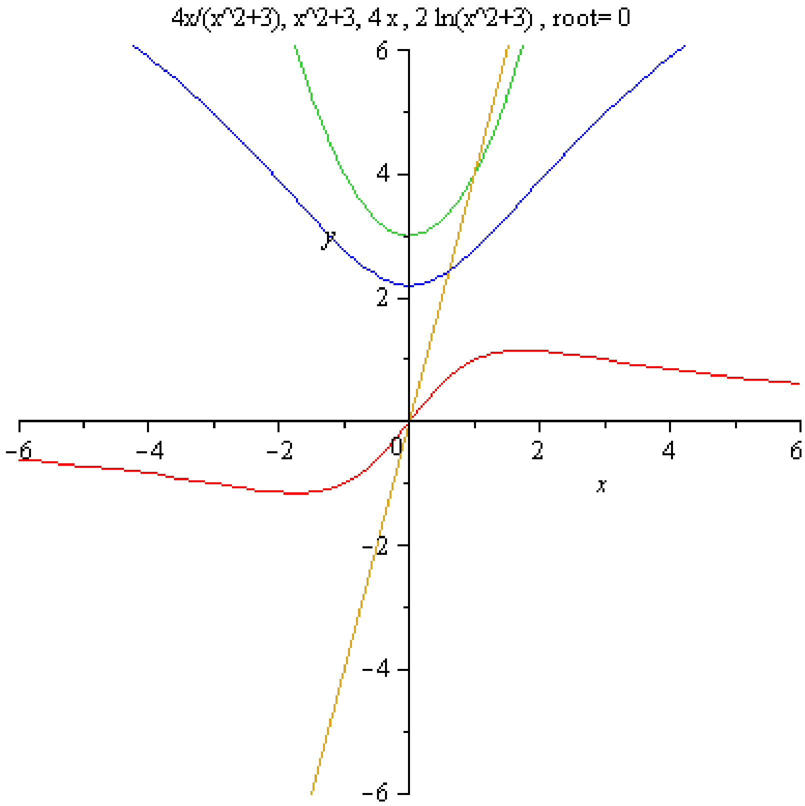
$\mathrm{D}(f) = \mathbf{R}$, integrand je ***lichá*** funkce (její graf je symetrický podle počátku), $f(0) = 0$.
Dále $f(x) > 0$ pro $x > 0$, $f(x) < 0$ pro $x < 0$; $f(x) \to 0\pm$ pro $x \to \pm\infty$.

Pro integraci použijeme substituci $x^2 + 3 = t$, $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Tedy $$\int \frac{4x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\ln t + C = \lfloor t = x^2+3 \rceil =$$

$$= 2\ln(x^2+3) + C, \qquad \text{kde } C \in \mathbf{R}.$$

Použili jsme standardní vzorce z derivací.
Argument logaritmu je zde vždy kladný ($x^2 + 3 > 0$), proto není třeba užít absolutní hodnotu.



Bodové hodnocení:

substituce	*3 b*
vztahy mezi dx a d*t*	*2 b*
dosazení do integrálu	*2 b*
úprava integrálu před integrováním	*2 b*
integrování	*4 b*
nezapomenutá konstanta	*1 b*
základní vlastnosti integrandu	*3 b*
náčrtek	*3 b*
Suma:	***20 b***

3. Vypočtěte matici **X** z rovnice $\mathbf{X}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^4$ v $\mathbf{R}$ a nad $\mathbb{Z}_7$.

Řešení:

$XA - 3B = C^4 \Rightarrow X = (C^4 + 3B)A^{-1},\ C^4 = (C^2)^2$ $\lfloor$počítáme mod 7$\rceil$ *3 b*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \equiv_7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lfloor$matice s podvěšeným sloupcem$\rceil$ *3 b*

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \equiv_7 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},\quad C^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}^2 \equiv_7 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4 b

$$X = \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv_7 \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}}} \equiv \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}}}$$

10 b.

Suma: ***20 b***

---

4. Vyřešte v **C** algebraickou rovnici $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$.
Nejprve určete (násobné?) racionální kořeny. Stupeň snižujte Hornerovým algoritmem.
Načrtněte graf polynomu. Nakreslete kořeny v komplexní rovině.

Řešení:

$$P_6(x) := (x^4 - x^3 - x^2 - x - 2)x^2 \;\Rightarrow\; 0 \text{ je 2násobným kořenem, } x_{1,2} = 0.$$

Kandidáty na *racionální* kořeny jsou dělitelé absolutního členu, tj. čísla 2, tj. ±{1; 2}.

	1	-1	-1	-1	-2	
-1		-1	2	-1	2	
	1	-2	1	-2	$\boxed{0}$	$\Rightarrow$ Číslo -1 je 1násobným kořenem, $x_3 = -1$.
~~-1~~		~~-1~~	~~3~~	~~-4~~		$\Rightarrow$ Rozklad: $(x-2)(x^2+1)$.
	~~1~~	~~-3~~	~~4~~	~~-6~~		
2		2	0	2		
	1	0	1	$\boxed{0}$		$\Rightarrow$ Číslo 2 je 1násobným kořenem, $x_4 = 2$.

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lfloor D=-4 \rceil \Rightarrow x_{5,6} = \pm i$, dvojice komplexně sdružených kořenů.

Rychlejší je ovšem využít co nejdříve periodické symetrie koeficientů k rozkladu polynomu

$(x-2)(x^2+1)$, a odtud pak kořeny x_4, $x_{5\text{-}6}$.

Množina kořenů je

$\{-1 \;\; 1\times,\; 0 \;\; 2\times,\; 2 \;\; 1\times;\; \pm i\}$

a rozklad v $\mathbf{R}$ je

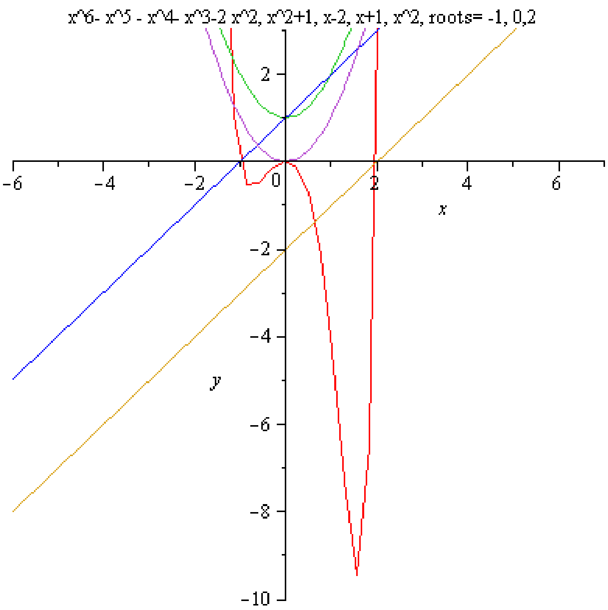
$$P_6(x) = (x+1)x^2(x-2)(x^2+1).$$

*Licho*násobný reálný kořen je „*průsečík*ový“,
*sudo*násobný reálný kořen je „*dotyk*ový“.
Zde kořen -1 je 1násobný, 0 je 2násobný, 2 je 1násobný.

O směřování grafu polynomu pro „velká“ (kladná, záporná) x
rozhoduje vedoucí člen polynomu (člen s největším mocnitelem).

Bodové hodnocení:

Vytknutí x^2	*2 b*
Kandidáti na kořeny	*2 b*
Kořen 0 2násobný	*2 b*
Kořen -1 1násobný	*2 b*
Kořen 2 1násobný	*2 b*
Kvadr. rovnice $x^2 + 1 = 0$, kořeny $\pm i$	*3 b*
Rozklad pomu	*2 b*
Náčrtek pomu	*3 b*
Náčrtek kořenů v **C**	*2 b*
Suma:	***20 b***



5. Zjistěte, zda zadaná úsečka $\overline{AB}$ má společné body s rovinou $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$, kde $\overline{AB}$: $A = [-1, -1, 1\ ]$, $B = [0, 0, -6]$. Načrtněte obrázek (úsečka, rovina) v třírozměrném prostoru.

Řešení:

$\overline{AB}: X = A + \ t \cdot (B - A);\ t \in \langle 0, 1\rangle$ *4 b*

$(B - A) = \ (1, 1, -7)$

Parametrické vyjádření úsečky:

$x_1 = \ -1 + \ t$

$x_2 = \ -1 + \ t \qquad\qquad t \in \langle 0, 1\rangle$ *4 b*

$x_3 = \ 1 - \ 7t$

Dosadíme do rovnice roviny a určíme hodnotu parametru t

$2(-1 + t) - (-1 + t) + 2(1 - 7t) = 2$

$1 - 13t = 0$ *4 b*

$t = \ -\frac{1}{13}$, tj. $t \notin \langle 0, 1\rangle$

Úsečka $\overline{AB}$ ***ne**má s danou rovinou žádný společný bod.* *4 b*

Náčrt obrázku (úsečka, rovina) v třírozměrném prostoru. *4 b*

Suma: ***20 b***