TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2018/19
NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Datum zkoušky: ____________________ Registrační číslo uchazeče: __ __ __ __ __ __

Varianta 1

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhněte.
- Odevzdávejte také pomocné výpočty — příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

Zadání

1 Předpisem

$$f(x) = \sqrt{1-|x|}$$

je dána reálná funkce reálné proměnné x. Určete maximální definiční obor funkce f, obor hodnot a derivaci funkce. Určete tečny funkce v bodech $x_{1,2} = \pm\frac{3}{4}$. Načrtněte graf funkce a obě tečny.

2 Vypočtěte integrál

$$\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

3 Rozhodněte, pro jaké hodnoty parametru $\phi \in [0, 2\pi)$ je matice

$$M(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & \phi \end{bmatrix}$$

regulární. V těchto případech nalezněte její inverzi.

4 Množina zbytkových tříd $\mathbb{Z}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ spolu s operacemi sčítání a násobení modulo sedm tvoří algebraické těleso (tedy strukturu analogickou např. racionálním, reálným, nebo komplexním číslům). Nalezněte inverzní prvek k prvku 5, tj. hodnotu prvku 5^{-1} v tomto tělese.

5 Přímka p je dána rovnicí $7x - 2y + 5 = 0$. Určete obecnou rovnici i parametrické rovnice přímky, která je kolmá k přímce p a prochází bodem $B = [16, -7]$.

Řešení

Příklad 1 (20 bodů celkem)

Funkce $f(x) = \sqrt{1-|x|}$ je definována když $1-|x| \geq 0$, tedy $x \in [-1,1] = D(f)$. Funkce je na intervalech $[-1,0]$ a $[0,1]$ monotónní, tedy $H(f) = [0,1]$ (2 body).

Derivace neexistuje v krajních bodech a uprostřed $D(f)$. Je dána jen na intervalech $(-1,0)$ a $(0,1)$. V prvním z nich je $f(x) = \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ a tedy

$$f'(x) = \left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(-1) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}},$$ (2 body)

na druhém je $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ a tedy

$$f'(x) = \left((1+x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$ (2 body)

Tečny hledáme ve směrnicovém tvaru $y = k_j x + q_j$, $j = 1,2$. Směrnice tečny je rovna derivaci v bodech $x_{1,2} = \pm\frac{3}{4}$, tedy $k_1 = f'(\frac{3}{4}) = -1$, $k_2 = f'(-\frac{3}{4}) = 1$. Tečna t_j, k funkci $f(x)$ v bodě x_j nabývá v tomto bodě stejnou hodnotu jako funkce, tedy $y_{1,2} = f(x_{1,2}) = f(\pm\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$. Dosazením do rovnice tečny dostaneme v jednotlivých případech:

$t_1 :\ \frac{1}{2} = y_1 = k_1 x_1 + q_1 = (-1)\cdot(\frac{3}{4}) + q_1$, tedy $q_1 = \frac{5}{4}$,
$t_2 :\ \frac{1}{2} = y_2 = k_2 x_2 + q_2 = (1)\cdot(-\frac{3}{4}) + q_2$, tedy $q_2 = \frac{5}{4}$.

Rovnice tečen tedy (po drobné úpravě) jsou

$$4x + 4y - 5 = 0 \quad \text{a} \quad 4x - 4y + 5 = 0.$$ (4 body)

Graf funkce na obrázku 1.

Příklad 2 (20 bodů celkem)

Integrujeme např. pomocí metody per-partes

$$\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(1+x)\,\mathrm{d}x,$$ (4 body)

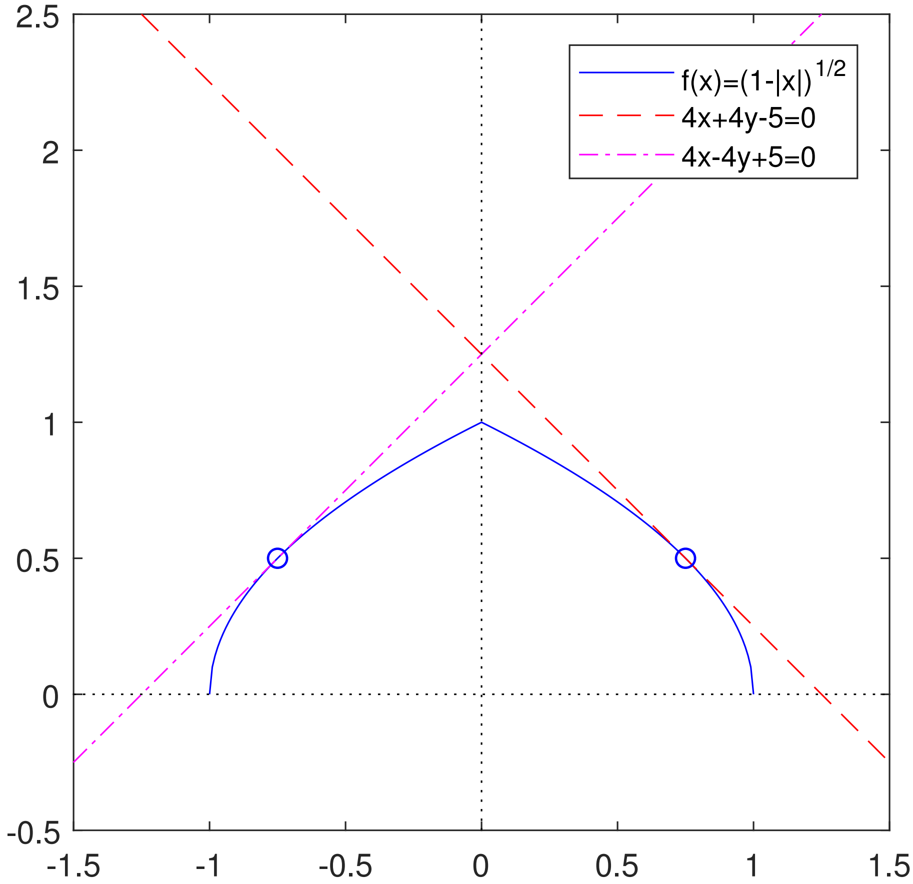
označme $u' = 1$ a $v = \ln(1+x)$, tj.

$$\begin{array}{ll} u' = 1, & u = x, \\ v = \ln(1+x), & v' = 1/(1+x), \end{array}$$ (4 body)

pak

$$\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = x\ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$ (4 body)

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI | Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická | Studentská 1402/2 | 461 17 Liberec 1
tel.: +420 485 352 515 | kmd.fp.tul.cz | www.fp.tul.cz | IČ: 467 47 885 | DIČ: CZ 467 47 885



Obrázek 1: Graf funkce f (4 body) a její tečny $2\times$(3 body) v bodech $x = \pm\frac{3}{4}$ z příkladu 1.

Protože

$$\int \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = x - \ln(1+x) \;+\; \text{Const.}\;,^{(4\text{ body})}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x)\,\mathrm{d}x &= x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) \;+\; \text{Const.}\\ &= (1+x)\ln(1+x) - x \;+\; \text{Const.}^{(4\text{ body})}\end{aligned}$$

Příklad 3 (20 bodů celkem)

Pro $\phi = 0$ je matice zjevně singulární (4 body).

Varianta 1

Dále můžeme postupovat např. Gaußovou eliminací. V intervalu $(0, 2\pi)$ je $\sin(\phi) = 0$ jen pro $\phi = \pi$, pak

$$M(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix} \quad \text{a zřejmě} \quad \Big(M(\pi)\Big)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^{-1} \end{bmatrix}.^{(4\text{ body})}$$

Pro $\phi \neq \pi$ dostaneme (označme $c = \cos(\phi)$ a $s = \sin(\phi)$; pozn. že $s^2 + c^2 = 1$) $[M(\phi)|I] =$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} c & -s & 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \phi & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} s & c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & -s & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \phi^{-1} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{c}{s} & 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ c & -s & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \phi^{-1} \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{c}{s} & 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{s} & 0 & 1 & -\frac{c}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \phi^{-1} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{c}{s} & 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \phi^{-1} \end{array}\right] \sim$$

... matice M je tedy určitě regulární i pro všechna $\phi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)^{(6\text{ bodů})}$ ...

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & c & \frac{1}{s} - \frac{c^2}{s} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \phi^{-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \phi^{-1} \end{array}\right].$$

Tedy

$$\Big(M(\phi)\Big)^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & \phi^{-1} \end{bmatrix}.^{(6\text{ bodů})}$$

Varianta 2

Protože matice je blokově diagonální, její inverzi dostaneme po blocích $^{(8\text{ bodů})}$, tedy

$$\Big(M(\phi)\Big)^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}^{-1} & 0 \\ 0 & \phi^{-1} \end{bmatrix}.$$

Matice

$$G(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

je maticí rotace / ortogonální maticí, takže její inverzi dostanu jako rotaci o opačný úhel / její transpozici $^{(8\text{ bodů})}$, tedy

$$\Big(G(\phi)\Big)^{-1} = G(-\phi) = \begin{bmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} = \Big(G(\phi)\Big)^T.$$

Příklad 4 (20 bodů celkem)

Existuje několik možných přístupů:

1) vyzkoušet všechny dostupné prvky,
2) vypsat si tabulku násobení modulo sedm a příslušný prvek nalézt v tabulce (což je de-facto stejný postup jako v bodě 1), jen nepatrně náročnější),
3) prvek dopočítat:

Označme neznámou hodnotu hledaného prvku $x = 5^{-1}$. Řešíme rovnici

$$5 \otimes_7 x = 1, \text{ (3 body)}$$

kde „$\otimes_7$" značí násobení modulo sedm, tedy

$$5 \cdot x \equiv 1 \ (\mathrm{mod} 7), \text{ (3 body)}$$

tedy

$$5 \cdot x + 7 \cdot k = 1. \text{ (3 body)}$$

Protože 7 a 5 jsou v takovém případě vždy nesoudělná čísla, řešení existuje a nalezneme ho Euclidovým algoritmem:

	7	5	2	1	0
			1	2	2
k	1	0	1	-2	5
x	0	1	-1	3	-7

(4 body)

Tedy platí

$$5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) = 1,$$
$$5 \cdot (-7) + 7 \cdot 5 = 0,$$
$$\Longrightarrow \quad 5(3 - 7\ell) + 7(5\ell - 2) = 1, \text{ (4 body)}$$

tedy

$$x \in \{3 - 7\ell, \text{ kde } \ell \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{Z}_7$$

tedy

$$x = 3. \text{ (3 body)}$$

Příklad 5 (20 bodů celkem)

Přímka $p: \ 7x - 2y + 5 = 0$ má normálový vektor $\vec{n}_p = (7, -2)$. Hledaná přímka q na ní má být kolmá, musí tedy mít normálový vektor $\vec{n}_q = (2, 7)$ kolmý na $\vec{n}_p$. Přímku q tedy hledáme ve tvaru

$$2x + 7y + c = 0. \text{ (5 bodů)}$$

Pímka q musí procházet bodem $B = [16, -7]$, tedy musí platit

$$2 \cdot 16 - 7 \cdot 7 + c = 0, \quad \text{tedy} \quad c = 17,$$

tj. obecná rovnice hledané přímky je

$$q:\ 2x + 7y + 17 = 0.^{\text{(5 bodů)}}$$

Varianta 1

Parametrický popis obecně dostaneme řešením této rovnice. Jednu proměnnou zvolíme jako parametr $y = \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$ a druhou dopočítáme

$$\begin{aligned} 2x + 7\tau + 17 &= 0 \\ 2x &= -7\tau - 17 \\ x &= -\frac{7}{2}\tau - \frac{17}{2}.^{\text{(5 bodů)}} \end{aligned}$$

Dostáváme tak parametrický popis

$$\begin{aligned} x &= -\frac{7}{2}\tau - \frac{17}{2}, \\ y &= \tau, \end{aligned}$$

neboli

$$[x, y] = K \cdot \tau + Q, \quad \text{kde} \quad K = [-7/2, 1],\ Q = [-17/2, 0],\ \tau \in \mathbb{R}.$$

Při použití vhodné substituce, např. $\tau = 2\sigma + 1$,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{7}{2}(2\sigma + 1) - \frac{17}{2} = -7\sigma - 12, \\ y &= 2\sigma + 1, \end{aligned}$$

neboli

$$[x, y] = K' \cdot \sigma + Q', \quad \text{kde} \quad K' = [-7, 2],\ Q' = [-12, 1],\ \sigma \in \mathbb{R},^{\text{(5 bodů)}}$$

se zbavíme zlomků.

Varianta 2

Protože víme, že kolmá přímka q prochází bodem B a její směrový vektor je $\vec{s}_q = \vec{n}_p = (7, -2)$, můžeme také rovnou psát (5 bodů)

$$[x, y] = \vec{s}_q \cdot \omega + B = [7\omega + 16, -2\omega - 7],\ \omega \in \mathbb{R}.^{\text{(5 bodů)}}$$