Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2019/20
NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Datum zkoušky: ______________________ Registrační číslo uchazeče: __ __ __ __ __ __

Varianta 1

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhněte.
- Odevzdávejte také pomocné výpočty — příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

Zadání

1 Předpisem

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{3-x^2}}$$

je dána reálná funkce reálné proměnné x. Určete maximální definiční obor funkce f, obor hodnot a derivaci funkce. Určete intervaly monotonie a lokální i globální extrémny funkce. Načrtněte graf funkce.

2 Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x},$$

kde e je Eulerovo číslo.

3 Nalezněte množinu všech řešení $\mathscr{S}_p = \{(x,y,z)\}$ soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x+2y+z &= 1 \\ x+y+p^2z &= p \end{aligned}$$

závislé na parametru $p \in \mathbb{R}$.

4 Určete poslední číslici (v desítkové soustavě) čísla

$$3^{6^{2019}}.$$

5 Rovina ϱ je dána rovnicí $x+y+z-1=0$. Určete směrové vektory roviny. Dále určete parametrické rovnice přímky, která je k rovině ϱ kolmá a prochází bodem $B=[3;1;4]$.

Řešení

Příklad 1 (20 bodů celkem)

Funkce $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3-x^2}}$ je definována když je:

(i) jmenovatel nenulový, tj. $3 - x^2 \neq 0$, tedy $\pm\sqrt{3} \notin D(f)$,

(ii) zlomek pod odmocninou nezáporný. Zřejmě

$x \in$	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$\{-\sqrt{3}\}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$\{0\}$	$(0, \sqrt{3})$	$\{\sqrt{3}\}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$\mathrm{sgn}(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\mathrm{sgn}(3-x^2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\mathrm{sgn}(\frac{x}{3-x^2})$	$+$	ndef.	$-$	0	$+$	ndef.	$-$

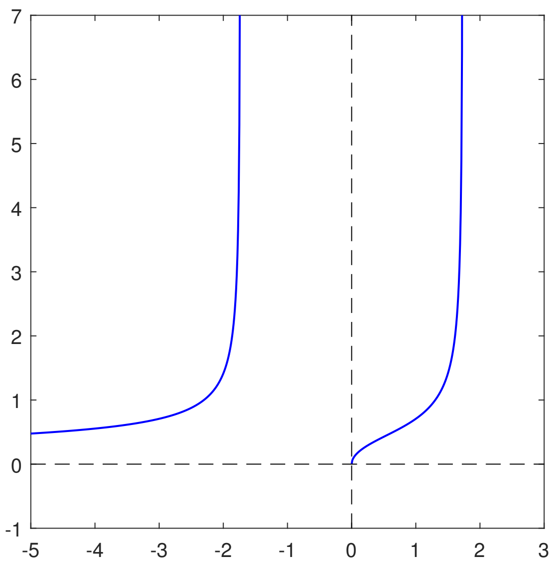
tedy

$$D(f) = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup [0, \sqrt{3}).^{\text{(3 body)}}$$

Funkce je na $D(f)$ spojitá, $f(0) = 0$, $\lim_{x \longrightarrow \sqrt{3}} f(x) = +\infty$, tedy $H(f) = [0, +\infty)$. (3 body)
Derivace je definovaná ve všech vnitřních bodech $D(f)$ (tedy na $D(f) \setminus \{0\}$) a platí

$$f'(x) = \left[\left(\frac{x}{3-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3-x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{3+x^2}{(3-x^2)^2} = \sqrt{\frac{3-x^2}{x}} \cdot \frac{3+x^2}{2(3-x^2)^2}^{\text{(6 bodů)}} > 0,$$

funkce f je tedy na celém $D(f)$ rostoucí (2 body). Extrémů může f nabývat pouze na hranici $D(f)$, tedy pouze pro $x \in \{0\}$, kde má lokální a zároveň globální minimum (3 body).



Obrázek 1: Graf funkce f (3 body) z příkladu 1.

Příklad 2 (20 bodů celkem)

Integrovanou funkci např. šikovně rozšíříme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \int \frac{e^x \mathrm{d}x}{e^x(1+e^x)}, \text{ (4 body)}$$

a provedeme vhodnou substituci

$$\left[\begin{array}{rl} t & = e^x, \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} & = e^x, \\ \mathrm{d}t & = e^x \mathrm{d}x \end{array}\right] \text{ (4 body)} \qquad \text{tj.} \qquad \int \frac{e^x \mathrm{d}x}{e^x(1+e^x)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}.$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A+(A+B)t}{t(1+t)},$$

kde $A = 1$ a $A + B = 0$, tj. $B = -1$, (4 body) dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln|t| - \ln|1+t| + \text{Const.} \text{ (4 body)}$$

a tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} = \ln|e^x| - \ln|1+e^x| + \text{Const.} = x - \ln(1+e^x) + \text{Const.} \text{ (4 body)}.$$

Příklad 3 (20 bodů celkem)

Soustavu nejprve upravíme Gaußovou eliminací (zde pouze vhodným odečtením; rozdíly druhé a první, a třetí a první) do tvaru

$$\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y & = & 0 \\ (p^2-1)z & = & p-1 \end{array} \quad \text{(4 body)}$$

Poslední rovnice

$$(p-1)(p+1)z = p-1$$

je výchozím bodem pro diskuzi (4 body). Zřejmě:

- Pro $p = -1$ se poslední rovnice redukuje na $0z = -2$ a soustava jako taková tedy nemá řešení, tj.

$$\mathscr{S}_{-1} = \emptyset \text{ (4 body)}.$$

- Pro $p = 1$ se poslední rovnice redukuje na $0z = 0$, celá soustava pak na

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

z čehož ihned dostáváme $y = 0$ (z druhé rovnice) a $z = \tau$, $x = 1 - \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$ (z první rovnice) tj.

$$\mathscr{S}_1 = \{(1 - \tau, 0, \tau) \ : \ \tau \in \mathbb{R}\}^{(\text{4 body})},$$

soustava má nekonečně mnoho řešení.

- Pro $p \neq \pm 1$ můžeme v poslední rovnici dělit výrazem $(p^2 - 1)$ dostáváme $z = \frac{p-1}{p^2-1} = \frac{1}{p+1}$ (z poslední rovnice), $y = 0$ (z druhé rovnice) a $x = 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1}$, tj.

$$\mathscr{S}_{p \neq \pm 1} = \left\{ \left(\frac{p}{p+1} \, , \, 0 \, , \, \frac{1}{p+1} \right) \right\}^{(\text{4 body})}.$$

Příklad 4 (20 bodů celkem)

Ptáme se na poslední číslici v desítkové soustavě, hledáme tedy takové $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ aby

$$3^{6^{2019}} \equiv x \mod 10^{(\text{4 body})}.$$

(Pro jistotu připomeňme, že $3^{6^{2019}} = 3^{(6^{2019})} \neq (3^6)^{2019} = 3^{6 \cdot 2019}$.) Zřejmě

$$\left.\begin{aligned} 1 = 3^0 &\equiv 1 \mod 10 \\ 3 = 3^1 &\equiv 3 \mod 10 \\ 9 = 3^2 &\equiv 9 \mod 10 \\ 27 = 3^3 &\equiv 7 \mod 10 \\ 81 = 3^4 = 3 \cdot 3^3 &\equiv 3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \mod 10 \\ 3^5 = 3 \cdot 3^4 &\equiv 3 \cdot 1 = 3 \mod 10 \\ 3^6 = 3 \cdot 3^5 &\equiv 3 \cdot 3 = 9 \mod 10 \end{aligned}\right. \ (\text{4 body})$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} 3^\ell &\equiv k \mod 10 \\ 3^{\ell+1} = 3 \cdot 3^\ell &\equiv 3 \cdot k \mod 10 \end{aligned}$$

přičemž čísla na pravých stranách se opakují s periodou čtyři. Potřebujeme tedy zjistit kolikrát se vejde čtyřka do 6^{2019}, resp. přesněji, kolik je $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ tak aby

$$6^{2019} \equiv y \mod 4^{(\text{4 body})}$$

(vzhledem k tomu, že 3 a 10 jsou nesoudělné, lze k této kongruenci dospět přímo použitím Eulerovy věty a Eulerovy funkce φ; $\varphi(10) = 4$). Zřejmě

$$\begin{aligned} 1 = 6^0 &\equiv 1 \mod 4 \\ 6 = 6^1 &\equiv 2 \mod 4 \\ 36 = 6^2 &\equiv 0 \mod 4 \\ 6^3 = 6 \cdot 6^2 &\equiv 6 \cdot 0 = 0 \mod 4 \\ &\vdots \\ 6^\ell &\equiv 0 \mod 4 \quad \text{pro } \ell \geq 2. \end{aligned} \quad {}^{(4\ \text{body})}$$

Protože $2019 \geq 2$, pak $6^{2019} \equiv 0 = y \mod 4$ a

$$3^{6^{2019}} \equiv 3^y = 3^0 = 1 = x \mod 10^{(4\ \text{body})}.$$

Poslední číslicí je tedy 1.

Příklad 5 (20 bodů celkem)

Rovina $\varrho : \ x + y + z - 1 = 0$ má normálový vektor $\vec{n}_\varrho = (1; 1; 1)^{(4\ \text{body})}$. Směrové vektory (rovina má dva) jsou na normálový vektor kolmé, můžeme zvolit např.

$$\vec{s}_{\varrho,1} = (1; -1; 0), \qquad \text{a} \qquad \vec{s}_{\varrho,2} = (0; 1; -1)^{(4\ \text{body})}.$$

Přímka p je parametricky dána jako množina bodů

$$[x; y; z] = [x_0; y_0; z_0] + \vec{s}_p \cdot t, \qquad t \in \mathbb{R}^{(3\ \text{body})},$$

kde $\vec{s}_p$ je směrový vektor p, t je parametr a $[x_0; y_0; z_0]$ je libovolný bod přímky p. Protože hledáme přímku kolmou na rovinu, pak $\vec{s}_p = \vec{n}_\varrho^{(3\ \text{body})}$. Přímka má procházet zadaným bodem $B = [3; 1; 4]^{(3\ \text{body})}$, tedy

$$\begin{aligned} p: \ x &= 3 + t \\ y &= 1 + t \quad {}^{(3\ \text{body})} \\ z &= 4 + t \end{aligned}$$

případně $p : \ [x; y; z] = [3; 1; 4] + (1; 1; 1)\, t$, kde $t \in \mathbb{R}$.