Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2019/20
NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Datum zkoušky: ______________________ Registrační číslo uchazeče: __ __ __ __ __ __

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

Varianta 2

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhněte.
- Odevzdávejte také pomocné výpočty — příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

Zadání

1 Předpisem

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$

je dána reálná funkce reálné proměnné x. Určete maximální definiční obor funkce f, obor hodnot a derivaci funkce. Určete intervaly monotonie a lokální i globální extrémny funkce. Načrtněte graf funkce.

2 Vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^3 x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x,$$

kde e je Eulerovo číslo.

3 Nalezněte deteminant matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

4 Určete poslední číslici (v desítkové soustavě) čísla

$$3^{6^{2019}} + 5^{9^{2019}}.$$

5 Jsou dány dvě roviny $\varrho : x + y + z - 1 = 0$ a $\pi : x + y - z + 1 = 0$. Zjistěte, zda jsou, či nejsou rovnoběžné. Pokud jsou rovnoběžné, určete jejich vzdálenost. Pokud nejsou, nalezněte parametrickou rovnici jejich průsečnice (přímky ležící v jejich průniku).

Řešení

Příklad 1 (20 bodů celkem)

Funkce $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$ je definována když je:

(i) jmenovatel nenulový, tj. $1 - x^2 \neq 0$, tedy $\pm 1 \notin D(f)$,

(ii) argument logaritmu kladný. Zřejmě

$x \in$	$(-\infty, -1)$	$\{-1\}$	$(-1, 0)$	$\{0\}$	$(0, 1)$	$\{1\}$	$(1, \infty)$
$\mathrm{sgn}(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\mathrm{sgn}(1-x^2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\mathrm{sgn}(\frac{x}{1-x^2})$	$+$	ndef.	$-$	0	$+$	ndef.	$-$

tedy

$$D(f) = (-\infty, -1) \cup (0, 1).^{(3\text{ body})}$$

Funkce je na $D(f)$ spojitá, $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, tedy $H(f) = \mathbb{R}$. (3 body) Derivace je definovaná na celém $D(f)$ a platí

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1 \cdot (1-x^2) - x \cdot (0 - 2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{x(1-x^2)}^{(4\text{ body})}.$$

Zřejmě

$x \in$	$(-\infty, -1)$	$(0, 1)$
$\mathrm{sgn}(1+x^2)$	$+$	$+$
$\mathrm{sgn}(1-x^2)$	$-$	$+$
$\mathrm{sgn}(x)$	$-$	$+$

funkce f je tedy na obou intervalech $D(f)$ rostoucí (4 body). Extrémů může f nabývat pouze na hranici $D(f)$, která ovšem není součástí $D(f)$. Funkce tedy extrémy nemá (3 body).

Příklad 2 (20 bodů celkem)

Nalezneme primitivní funkci k funci $x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, např. metodou per-partes

$$\left[\begin{array}{llll} u & = x, & v' & = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \\ u' & = 1, & v & = -2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \end{array}\right] (7\text{ bodů})$$

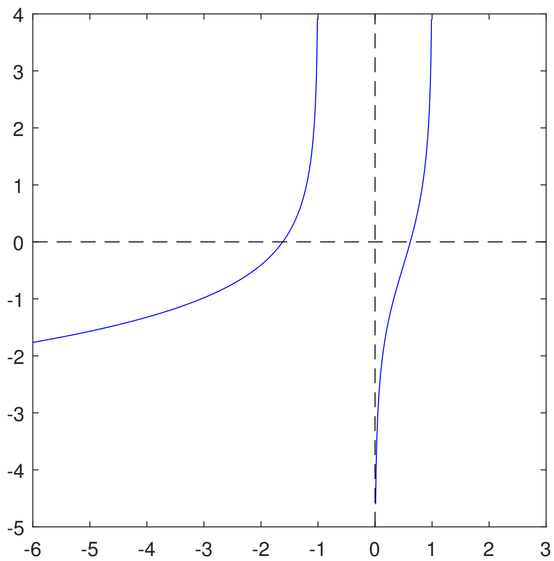
tj.

$$\int x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x = -2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + 2 \int \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x = -(2x+4)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \text{Const.}^{(7\text{ bodů})}$$

Dosazením integračních mezí dostaneme

$$\int_0^3 x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \mathrm{d}x = \left[-(2x+4)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_0^3 = 4 - 10\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}.^{(6\text{ bodů})}$$

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI | Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická | Studentská 1402/2 | 461 17 Liberec 1
tel.: +420 485 352 515 | kmd.fp.tul.cz | www.fp.tul.cz | IČ: 467 47 885 | DIČ: CZ 467 47 885



Obrázek 1: Graf funkce f (3 body) z příkladu 1.

Příklad 3 (20 bodů celkem)

Můžeme opakovaně použít Laplaceův rozvoj podle řádku nebo sloupce, nebo můžeme např. provést šikovnou simultánní permutaci řádků a sloupců, dostaneme

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \text{(8 bodů)}.$$

Protože poslední determinant je blokově diagonální (2 body), dostaneme

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right) \text{(5 bodů)}$$

a tedy

$$\det(A) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) \cdot (9 \cdot 7 - 8 \cdot 8) \cdot (5 \cdot 5 - 6 \cdot 4) = 1 \text{(5 bodů)}.$$

Příklad 4 (20 bodů celkem)

Ptáme se na poslední číslici v desítkové soustavě, hledáme tedy takové $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ aby

$$3^{6^{2019}} + 5^{9^{2019}} \equiv x \mod 10 \text{(3 body)}.$$

(Pro jistotu připomeňme, že $a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq (a^b)^c = a^{b \cdot c}$.) Začneme prvním sčítancem $3^{6^{2019}}$. Zřejmě

$$\begin{aligned} 1 = 3^0 &\equiv 1 \mod 10 \\ 3 = 3^1 &\equiv 3 \mod 10 \\ 9 = 3^2 &\equiv 9 \mod 10 \\ 27 = 3^3 &\equiv 7 \mod 10 \\ 81 = 3^4 = 3 \cdot 3^3 &\equiv 3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \mod 10 \qquad \text{(3 body)} \\ 3^5 = 3 \cdot 3^4 &\equiv 3 \cdot 1 = 3 \mod 10 \\ 3^6 = 3 \cdot 3^5 &\equiv 3 \cdot 3 = 9 \mod 10 \\ &\vdots \\ 3^\ell &\equiv k \mod 10 \\ 3^{\ell+1} = 3 \cdot 3^\ell &\equiv 3 \cdot k \mod 10 \end{aligned}$$

přičemž čísla na pravých stranách se opakují s periodou čtyři. Potřebujeme tedy zjistit kolikrát se vejde čtyřka do 6^{2019}, resp. přesněji hledáme $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ tak, aby

$$6^{2019} \equiv y \mod 4^{\text{(3 body)}}$$

(vzhledem k tomu, že 3 a 10 jsou nesoudělné, lze k této kongruenci dospět přímo použitím Eulerovy věty a Eulerovy funkce φ; $\varphi(10) = 4$). Zřejmě

$$\begin{aligned} 1 = 6^0 &\equiv 1 \mod 4 \\ 6 = 6^1 &\equiv 2 \mod 4 \\ 36 = 6^2 &\equiv 0 \mod 4 \qquad \text{(3 body)} \\ 6^3 = 6 \cdot 6^2 &\equiv 6 \cdot 0 = 0 \mod 4 \\ &\vdots \\ 6^\ell &\equiv 0 \mod 4 \quad \text{pro } \ell \geq 2 \end{aligned}$$

Protože $2019 \geq 2$, pak $6^{2019} \equiv 0 = y \mod 4$ a

$$3^{6^{2019}} \equiv 3^y = 3^0 = 1 = x \mod 10^{\text{(3 body)}}.$$

Podobně vyšetříme druhý sčítanec $5^{9^{2019}}$. Zde je situace ještě jednodušší

$$\begin{aligned} 1 = 5^0 &\equiv 1 \mod 10 \\ 5 = 5^1 &\equiv 5 \mod 10 \\ 25 = 5^2 &\equiv 5 \mod 10 \qquad \text{(3 body)} \\ &\vdots \\ 5^\ell &\equiv 5 \mod 10 \quad \text{pro } \ell \geq 1, \quad \text{tedy} \\ 5^{9^{2019}} &\equiv 5 \mod 10 \end{aligned}$$

Poslední číslicí je tedy

$$3^{6^{2019}} + 5^{9^{2019}} \equiv 1 + 5 \equiv 6 \mod 10^{\text{(2 body)}}.$$

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI | Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická | Studentská 1402/2 | 461 17 Liberec 1
tel.: +420 485 352 515 | kmd.fp.tul.cz | www.fp.tul.cz | IČ: 467 47 885 | DIČ: CZ 467 47 885

Příklad 5 (20 bodů celkem)

Rovina $\varrho: \; x+y+z-1=0$ má normálový vektor $\vec{n}_\varrho = (1;1;1)$, rovina $\pi: \; x+y-z+1=0$ má normálový vektor $\vec{n}_\pi = (1;1;-1)$. Kdyby byly roviny rovnoběžné, měly by stejné normálové vektory. Roviny tedy rovnoběžné nejsou (4 body).

Průsečnice, tedy přímka ležící v průniku obou rovnin je množinou bodů splňujících rovnice obou rovin zároveň. Budeme tedy hledat množinu všech bodů (řešení), vyhovujících soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x+y+z-1&=0 \\ x+y-z+1&=0 \end{aligned} \qquad \text{schematicky} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^{(4\text{ body})}.$$

Řešíme např. Odečtením obou rovnic (tj. Gaußovou eliminací) dostaneme

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right]^{(4\text{ body})}$$

tedy $z=1$. Volba parametru, např. $y=\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, nám umožní dopočítat poslední neznámou $x=-y-z+1=-\tau$ (4 body). Dostáváme tak parametrický popis průsečnice

$$p: \begin{array}{rcl} x &=& -\tau \\ y &=& \tau \\ z &=& 1 \end{array} \quad (4\text{ body})$$

případně $p: \; [x;y;z] = [0;0;1] + (-1;1;0)\,\tau$, kde $\tau \in \mathbb{R}$.