Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2020/21
NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Datum zkoušky: ______________________ Registrační číslo uchazeče: __ __ __ __ __ __

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

Varianta 1

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhněte.
- Odevzdávejte také pomocné výpočty — příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

Zadání

1 Je dána množina $\mathcal{M} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ čtyř funkcí

$$f_1(x) = x^3 + x^2, \quad f_2(x) = x^2 + x, \quad f_3(x) = x + 1, \quad f_4(x) = 1 + x^3.$$

Nalezněte (nějakou) maximální lineárně nezávislou podmnožinu $\mathcal{B}$ množiny $\mathcal{M}$ a prvky rozdílu $\mathcal{M} \setminus \mathcal{B}$ vyjádřete jako lineární kombinace prvků $\mathcal{B}$.

2 Vypočtěte určitý integrál

$$\int_0^1 \frac{x^4 \cdot (1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Je výsledek kladný, nulový, nebo záporný?

3 Nalezněte všechny asymptoty (asymptotické přímky) funkce

$$g(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + x - 1}.$$

Poznamenejme, že jich je více než dvě.

4 Jsou dány dvě roviny v prostoru

$$\rho: \; x + y + z + 1 = 0, \qquad \sigma: \; x - y + z - 1 = 0.$$

Nalezněte jejich průsečnici (přímku ležící v jejich průniku) a napište ji v parametrickém tvaru.

5 Nalezněte poslední číslici (v desítkové soustavě) čísla

$$3^{3^{3^3}}.$$

Pozor na pořadí operací!

Řešení

Příklad 1 (20 bodů celkem)

Nejprve však bude vhodné funkce interpretovat jako (sloupcové) aritmetické vektory. To nejsnáze uděláme tak, že budeme uvažovat jejich souřadnice v monomiální bázi např. (x^3, x^2, x^1, x^0). Celou množinu pak můžeme interpretovat jako matici (5 bodů)

$$M = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow x^3 \\ \longleftarrow x^2 \\ \longleftarrow x^1 \\ \longleftarrow x^0 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{array} & \end{array}$$

Nyní pomocí např. Gaußovy eliminační metody určíme hodnost matice M. Zjistíme tím (i) zda je množina $\mathcal{M}$ lineárně (ne)závislá, navíc (ii) je-li lineárně závislá, nalezneme tak (některou) maximální lineárně nezávislou podmnožinu. Gaußova eliminace je v tomto případě velmi jednoduchá, stačí postupně odečítat řádky: (5 bodů)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že první tři sloupce jsou lineárně nezávislé, čtvrtý je jejich kombinací. Formálně zbývá dořešit soustavu rovnic

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

ta je však triviální. Čtvrtý sloupec, resp. funkci dostáváme jako lineární kombinaci

$$f_4(x) = f_1(x) \cdot 1 + f_2(x) \cdot (-1) + f_3(x) \cdot 1 = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x). \text{ (10 bodů)}$$

Pozn. že nyní je již zřejmé, že libovolná tříprvková podmnožina je maximální lineárně nezávislou podmnožinou.

Příklad 2 (20 bodů celkem)

Nejprve funkci upravíme do tvaru jednoduššího pro integraci roznásobením čitatele (5 bodů)

$$\frac{x^4 \cdot (1-x)^4}{1+x^2} = \frac{x^4 \cdot (1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4)}{1+x^2} = \frac{x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4}{x^2+1}$$

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI | Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická | Studentská 1402/2 | 461 17 Liberec 1
tel.: +420 485 352 515 | kmd.fp.tul.cz | www.fp.tul.cz | IČ: 467 47 885 | DIČ: CZ 467 47 885

a částečným vydělením (5 bodů)

$$
\begin{array}{r}
(x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4) \\
-(x^8 + x^6) \\
\hline
-4x^7 + 5x^6 - 4x^5 + x^4 \\
-(-4x^7 - 4x^5) \\
\hline
5x^6 + x^4 \\
-(5x^6 + 5x^4) \\
\hline
-4x^4 \\
-(-4x^4 - 4x^2) \\
\hline
4x^2 \\
-(4x^2 + 4) \\
\hline
-4
\end{array}
\quad : \quad (x^2+1) \quad = \quad x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4
$$

tedy

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^4 \cdot (1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{x^2+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^7}{7} - \frac{4x^6}{6} + \frac{5x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + 4x - 4 \cdot \operatorname{arc\,tan}(x) \right]_0^1 \\
&= \frac{22}{7} - \pi
\end{aligned}
$$

neboť $\operatorname{arc\,tan}(1) = \pi/4$. (5 bodů)

Protože funkce x^4, $(1-x)^4$ a $1+x^2$ jsou na intervalu integrace $[0,1]$ nezáporné a na otevřeném intervalu $(0,1)$ dokonce kladné, je integrál kladný, tedy $22/7 - \pi > 0$. (5 bodů)

Poznamenejme, že jsme tím ověřili, že velmi dobře známá a oblíbená racionální aproximace čísla π, totiž $22/7$, je jeho horním odhadem, neboť $22/7 > \pi$.

Příklad 3 (20 bodů celkem)

Asymptoty mohou být třech typů: svislé, vodorovné a šikmé.

Svislé asymptoty

Připomeňme, že funkce $g(x)$ má svislou asymptotu v bodě a (tj. přímka $x-a=0$ je asymptotou) pokud je alespoň jedna jednostranná limita $g(x)$ v a nevlastní. Svislé asymptoty tedy nemá smysl hledat v bodech, kde je funkce spojitá. Funkce $g(x)$ je racionální, jediné, kde má smysl hledat asymptoty jsou nulové body jmenovatele (pro vyšetřování limit se však budou hodit i nulové body čitatele). Čitatel má zřejmě jediný nulový bod

$$
\begin{aligned}
x^3 + x = x \cdot (x^2+1) &= 0, \\
x &= 0,
\end{aligned}
$$

jmenovatel má dva

$$x^2 + x - 1 = 0,$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Dostáváme tedy (5 bodů)

	$(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0)$	$(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$
čitatel	$-$	$-$	$+$	$+$
jmenovatel	$+$	$-$	$-$	$+$
$g(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Pro jednostranné limity v nulových bodech jmenovatele tedy platí

$$\lim_{x\longrightarrow(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})^-} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\longrightarrow(\frac{-1-\sqrt{5}}{2})^+} g(x) = \infty,$$

a

$$\lim_{x\longrightarrow(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^-} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\longrightarrow(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^+} g(x) = \infty.$$

V obou bodech jsou tedy svislé asymptoty (5 bodů)

$$x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 0 \quad \text{a} \quad x - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 0.$$

Vodorovné a šikmé asymptoty

Vodorvné resp. šikmé asymptoty má smysl hledat pouze v nevlastních bodech, tedy pro $x \longrightarrow \pm\infty$. Zřejmě

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} g(x) = \pm\infty,$$

vodorovnou asymptotu funkce $g(x)$ tedy nemá žádnou.

Zbývá asymptota šikmá, tedy ve tvaru $y = kx + q$ (resp. $kx - y + q = 0$), kde $k \neq 0$. Její směrnici k nalezneme snadno buď jako limitu $g(x)/x$ nebo $g'(x)$, zřejmě (5 bodů)

$$k = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2+x-1} = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{g'(x)}{=} \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{x^4+\cdots}{(x^2+x-1)^2} = 1.$$

Protože směrnice nezávisí na x, šikmá asymptota existuje. Existuje navíc se stejnou směrnicí v obou nevlastních bodech. Zbývá dopočítat q.

Protože funkce $g(x)$ se v nevlastních bodech chová jako $kx + q$, zbývá dopočítat limity (5 bodů)

$$q = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} g(x) - kx = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} g(x) - x = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{x^3+x}{x^2+x-1} - \frac{x^3+x^2-x}{x^2+x-1} = -1.$$

Šikmou asymptotou tedy je přímka

$$x - y - 1 = 0.$$

Je jedinou šikmou asymptotou sdílenou oběma nevlastními body.

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI | Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická | Studentská 1402/2 | 461 17 Liberec 1
tel.: +420 485 352 515 | kmd.fp.tul.cz | www.fp.tul.cz | IČ: 467 47 885 | DIČ: CZ 467 47 885

Příklad 4 (20 bodů celkem)

Průsečnice je množinou bodů, které splňují rovnice obou rovin. Můžeme si ji tedy představit jako množinu řešení soustavy rovnic obou rovin, tj. (7 bodů)

$$x + y + z = -1, \qquad x - y + z = 1.$$

Sečtením a odečtením obou rovnic dostaneme ekvivalentní soustavu

$$2x + 2z = 0, \qquad 2y = -2.$$

Druhou rovnici umíme ihned vyřešit, zřejmě $y = -1$. Řešení první rovnice musíme parametrizovat, zřejmě pro $z = t$, kde $t \in \mathbb{R}$, dostaneme $x = -t$. Soustava rovnic má tedy množinu řešení (7 bodů)

$$\{(-t, -1, t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Zároveň také ihned dostáváme parametrický tvar této množiny – přímky (6 bodů)

$$(x, y, z) = (-t, -1, t) = (0, -1, 0) + (-1, 0, 1) \cdot t,$$

neboť řešen homogenní soustavy $\vec{s} = (-1, 0, 1)$ je směrovým vektorem průsečnice a partikulární řešení $(0, -1, 0)$ je nějakým bodem na této průsečnici.

Příklad 5 (20 bodů celkem)

Ptáme se na poslední číslici v desítkové soustavě, tedy na zbytek po dělení desíti, tj.

$$3^{3^{3^3}} \equiv x \mod 10^{(5\text{ bodů})}.$$

Pro jistotu připomeňme, že

$$3^{3^{3^3}} = 3^{(3^{(3^3)})}.$$

Na úlohu můžeme jít buď úvahou, nebo s využitím Eulerovy věty, která říká, že pro nesoudělná čísla a a m (značíme $a \perp m$) platí

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m,$$

kde $\varphi(m)$ značí počet čísel menších než m nesoudělných s m.

Zřejmě $3 \perp 10$ a $\varphi(10) = |\{1, 3, 7, 9\}| = 4$, tedy

$$3^4 \equiv 1 \mod 10.$$

(Ke stejnému výsledku dojdeme snadno i úvahou.) Původní otázka se tedy redukuje na otázku, kolikrát se mocnina 4 vejde do 3^{3^3}, resp. kolik zbyde, tj. na řešení úlohy

$$3^{3^3} \equiv y \mod 4^{(5\text{ bodů})}.$$

Opět využijeme Eulerovy věty. Zřejmě $3 \perp 4$ a $\varphi(4) = |\{1,3\}| = 2$, tedy

$$3^2 \equiv 1 \mod 4.$$

Předchozí úloha se tedy redukuje na otázku, kolikrát se mocnina 2 vejde do 3^3, tj. na řešení úlohy

$$3^3 \equiv z \mod 2^{(5 \text{ bodů})}.$$

Třetí aplikace Eulerovy věty by byla opět možná, ale zbytečná. Poslední úloha je totiž triviální. Ptáme-li se na zbytek po dělení dvěma, ptáme se, zda je číslo sudé, či liché. Protože součin dvou lichých čísel je vždy liché číslo, je i číslo $3^3 = (3 \cdot 3) \cdot 3$ liché, tedy $z = 1$. Tedy

$$3^{3^3} \equiv 3^z = 3^1 = 3 \mod 4, \qquad y = 3.$$

Tedy

$$3^{3^{3^3}} \equiv 3^y = 3^3 = 27 \equiv 7 \mod 10.$$

Poslední desítkovou číslicí našeho čísla je tedy 7. (5 bodů)