Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2021/22
Bc. studium Matematika se zaměřením na vzdělávání

Datum zkoušky: ______________________ Registrační číslo uchazeče: __ __ __ __ __ __

Varianta 1

Příklad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Celkem
Body											

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhněte.
- Odevzdávejte také pomocné výpočty — příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

Zadání (Pozor, zadání má dvě strany!)

1 (Úpravy výrazů) Zjednodušte výraz

$$\frac{2}{(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) \cdot x^{-\frac{1}{2}}} + \left(\frac{a \cdot \sqrt{a} + x \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \sqrt{a \cdot x} \right) \cdot (a - x)^{-1}$$

a určete podmínky, za kterých výraz i provedená zjednodušení dávají smysl.

2 (Posloupnosti & řady) Uvažujme posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ popsanou vztahem

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} \qquad \text{a zafixovanou v bodě} \qquad a_5 = 2.$$

Spočtěte součet prvních pěti členů poslopunosti $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

3 (Rovnice s absolutní hodnotou) Nalezněte množinu všech řešení rovnice

$$|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5.$$

4 (Exponenciální a logaritmické rovnice) Nalezněte množinu všech řešení rovnice

$$3^{2x+1} = 15 - 4 \cdot 3^x.$$

5 (Funkce & jejich grafy) Načrtněte graf funkce

$$f(x) = \frac{5 \cdot x + 3}{3 - 2 \cdot x},$$

vyznačte průsečíky s osami a asymptoty.

Zadání (Druhá strana)

6 (Goniometrické výrazy) Zjednodušte následující výraz

$$\frac{\tan(x) \cdot \tan(2 \cdot x)}{\tan(x) - \tan(2 \cdot x)},$$

kde $\tan(x)$ značí tangens úhlu x.

7 (Kombinatorika & pravděpodobnost) Na zkoušku dorazilo deset studentů, tři z nich jsou SARS-CoV-2 pozitivní. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané skupince pěti studentů budou všichni negativní?

8 (Komplexní čísla) Zjednodušte komplexní číslo

$$\frac{\mathbf{i} + \mathbf{i}^2 + \mathbf{i}^3}{2 + \mathbf{i}} + (1 + \mathbf{i})^2.$$

9 (Analytická geometrie) Napište rovnici kružnice se středem S procházející bodem K,

$$S[2, 1],\ K[6, -2],$$

a vypočtěte souřadnice bodů, ve kterých kružnice protíná osy x a y.

10 (Konstrukční úloha) Zvolte si tři body A, B a C tak, aby neležely na jedné přímce. Zkonstruujte trojúhelník ΔPQR tak, aby vámi zvolené body A, B, C byly středy jeho stran. Konstrukci narýsujte a symbolicky zapište.

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI | Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická | Studentská 1402/2 | 461 17 Liberec 1
tel.: +420 485 352 515 | kmd.fp.tul.cz | www.fp.tul.cz | IČ: 467 47 885 | DIČ: CZ 467 47 885

1)
$$\frac{2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)x^{-\frac{1}{2}}}+\left(\frac{a\sqrt{a}+x\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}-\sqrt{ax}\right)\cdot(a-x)^{-1}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}+\left(\frac{a\sqrt{a}+x\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}-\frac{a\sqrt{x}+x\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)(a-x)^{-1}$$

1

$$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}+\left(\frac{\cancel{(a-x)}(\sqrt{a}-\sqrt{x})}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)\frac{1}{\cancel{(a-x)}}$$

1

$$=\underbrace{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}}_{1}=\boxed{1}$$

1

podm: $\boxed{a\neq x}$ 1

$(a\neq 0 \vee x\neq 0)$

$\boxed{x\neq 0}$

$\boxed{\begin{array}{l}a\geq 0\\ x\geq 0\end{array}}$

---

2) $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$, $a_5=2$

$a_n=a_{n+1}^2$, $a_4=4$ 1, $a_3=16$ 1, $a_2=256$ 1, $a_1=65536$ 1

$S_5=65536+256+16+4+2=\boxed{65814}$ 1

---

3) $x^2-9=0$, $x_{1,2}=\pm 3$

$x^2-4=0$, $x_{3,4}=\pm 2$

	$(-\infty,-3]$	$[-3,-2]$	$[-2,2]$	$[2,3]$	$[3,\infty)$
x^2-9	+	−	−	−	+
x^2-4	+	+	−	+	+

3

$(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$: $(x^2-9)+(x^2-4)=5$, $2x^2=18$, $\boxed{x=\pm 3}$ 2

$[-3,-2]\cup[2,3]$: $(9-x^2)+(x^2-4)=5$, $5=5$, $\boxed{x\in[-3,2]\cup[2,3]}$

$[-2,2]$: $(9-x^2)+(4-x^2)=5$, $-2x^2=-8$, $\boxed{x=\pm 2}$

4) $-3^{2x+1} = 4\cdot 3^x - 15$

$$3\cdot(3^x)^2 + 4(3^x) - 15 = 0$$

$$3^x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+180}}{6} = -\frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{196}^{\,\cancel{14}\;7}}{\cancel{6}\;3} = \begin{cases} -3 \\ \frac{5}{3} \end{cases}$$ (3)

$3^x = 5/3$ (1)

$$\boxed{x = \log_3(5/3)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}\ 3^x > 0$

$3^x \neq -3$ (1)

---

5) $f(x) = \frac{5x+3}{3-2x}$ $\quad D_f: \mathbb{R}\setminus\{3/2\}$

průsečíky $x=0,\ f(0) = 3/3 = 1,\ [0,1]$ (1)

$f(x)=0,\ 5x+3=0,\ x=-3/5,\ [-3/5, 0]$ (1)

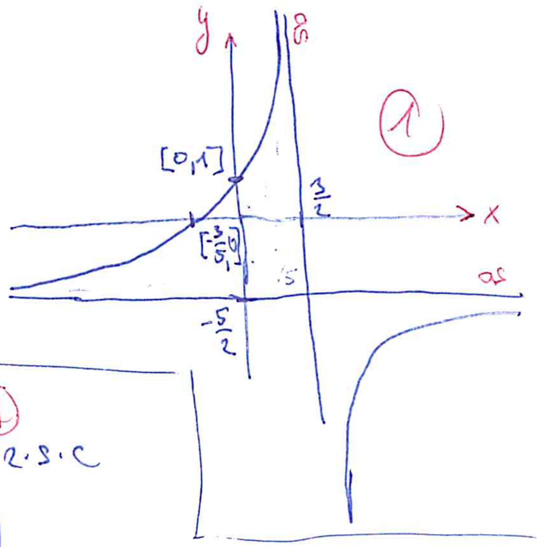
asymptoty $x = 3/2$ (svislá) (1)

$$f(x) = -\frac{5(x+3/5)}{2(x-3/2)} = \left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{(x-3/2)+\overbrace{(3/5+3/2)}^{21/10}}{x-3/2} = \left(-\frac{5}{2}\right)\left[1+\frac{21/10}{x-3/2}\right]$$

$$= -\frac{5}{2} + \frac{21}{6-4x}$$

$y = -5/2$ (vodorovná)

(1)



(1)

---

6) $t = \tan(x)$, $t2 = \tan(2x)$
$s = \sin(x)$, $s2 = \sin(2x)$
$c = \cos(x)$, $c2 = \cos(2x)$

(1) $s2 = 2\cdot s\cdot c$

$$\frac{t\cdot t2}{t - t2} = \frac{\frac{s}{c}\cdot\frac{s2}{c2}}{\frac{s}{c} - \frac{s2}{c2}} = \frac{\frac{s\cdot s2}{\cancel{c\cdot c2}}}{\frac{s\cdot c2 - c\cdot s2}{\cancel{c\cdot c2}}} = \frac{s\cdot s2}{s\cdot c2 - c\cdot s2} = \frac{\cancel{s}\cdot s2}{\cancel{s}\cdot c2 - c\cdot 2\cdot \cancel{s}\cdot c} = \frac{s2}{c2 - 2\cdot c\cdot c}$$

(1)

$$= \frac{s2}{c\cdot c - s\cdot s - 2\cdot c\cdot c} = -\frac{s2}{s\cdot s + c\cdot c} = \boxed{-s2}$$

(1) (1) (1)

$c2 = c\cdot c - s\cdot s$

7) skupinek pěti studentů (1) $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 252$

skupinek pěti negativních (1) $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$

$\boxed{P = \frac{21}{252}} < 10\%$ (3)

---

8) $\frac{i+i^2+i^3}{2+i} + (1+i)^2 = \frac{i-1-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} + (1+2i-1)$ (1) (1) (1)

$= \frac{i-2}{4+1} + 2i = \frac{i-2+10i}{5} = \boxed{\frac{11i-2}{5}}$ (2)

---

9) kružnice se středem $S[2,1]$

$(x-2)^2+(y-1)^2 = r^2$ (1)

procházející bodem $K[6,-2]$

$(6-2)^2+(-2-1)^2 = 16+9 = 25 = r^2$ (1)

$\boxed{(x-2)^2+(y-1)^2 = 5^2}$ (1)

průsečíky s osami: $x=0$: $4+(y-1)^2 = 25$, $y-1 = \pm\sqrt{21}$ (1)

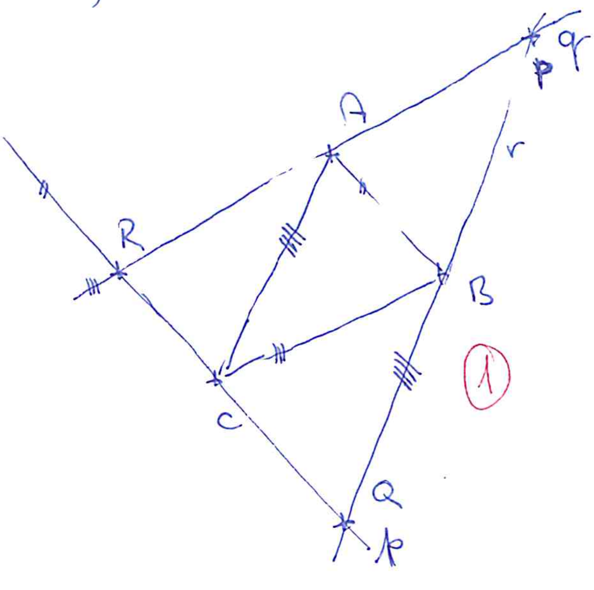
$[0, 1-\sqrt{21}]$, $[0, 1+\sqrt{21}]$

$y=0$: $(x-2)^2+1 = 25$, $x-2 = \pm 2\sqrt{6}$

$[2\pm 2\sqrt{6}, 0]$ (1)

---

10) body půlí strany $\triangle PQR$ $\Rightarrow$ AB, BC, CA jsou střední příčky (1)



(1)

1) Dáno A, B, C

(1) 2) úsečky AB, BC, CA

(1) 3) přímka $p \parallel AB$ $C \in p$
$q \parallel BC$ $A \in q$
$r \parallel CA$ $B \in r$

(1) 4) body $P \in q \cap r$
$Q \in r \cap p$
$R \in p \cap q$