TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2021/22
NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Datum zkoušky: ______________________ Registrační číslo uchazeče: __ __ __ __ __ __

Varianta 1

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

- Ke každému příkladu uveďte podrobný, přiměřeně okomentovaný postup. Řešení podtrhněte.
- Odevzdávejte také pomocné výpočty — příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

Zadání

1 Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x) = \sqrt{(x^3 + 2 \cdot x^2 + x - 4)^2}.$$

Nápověda: Uvědomte si, z čeho je funkce složená, a zkuste si načrtnout její graf. Uvědomte si, že lze snadno nalézt kořen zadané funkce.

2 Vypočtěte integrál

$$\int \max(1, x^2)\, \mathrm{d}x$$

a načrtněte graf integrované funkce a některé primitivní funkce.

3 Nalezněte množinu všech (komplexních) kořenů rovnice

$$x^7 = 1.$$

Ukažte, že tato množina spolu s násobením komplexních čísel tvoří grupu.

4 Uvažujme rovinu σ zadanou obecnou rovnicí a parametricky zadanou přímku p v prostoru

$$\sigma: \quad x + y + z + 1 = 0, \qquad p: \quad \begin{aligned} x &= 3 \cdot t + 2, \\ y &= 2 \cdot t + 3, \\ z &= -1. \end{aligned}$$

Nalezněte jejich průsečík $A \in \sigma \cap p$.
Nalezněte dále přímku q ležící v rovnině σ, kolmou na přímku p, procházející bodem A.

5 Kolika způsoby lze z cifer $\{3, 5, 7, 2, 1, 0\}$ sestavit sudé čtyřciferné číslo tak, aby každá cifra byla využita nejvýše jednou.

1)

$$f(x) = \sqrt{(x^3+2x^2+x-4)^2}$$
$$= |x^3+2x^2+x-4|$$
$$= |p(x)|$$

$$p(x) = x^3+2x^2+x-4 \quad 1$$

polynom má jediný kořen

kořeny $p(x)$ — změny znaménka $p(x)$ 1

$x_1 = 1 \longrightarrow 1^3+2\cdot1^2+1-4=0$

$$[x^3+2x^2+x-4]:[x-1] = \underbrace{x^2+3x+4}_{\downarrow} \overset{!}{=} 0$$
$$-[x^3-x^2]$$
$$3x^2+x-4$$
$$-[3x^2-3x]$$
$$4x-4$$
$$-[4x-4]$$
$$0$$

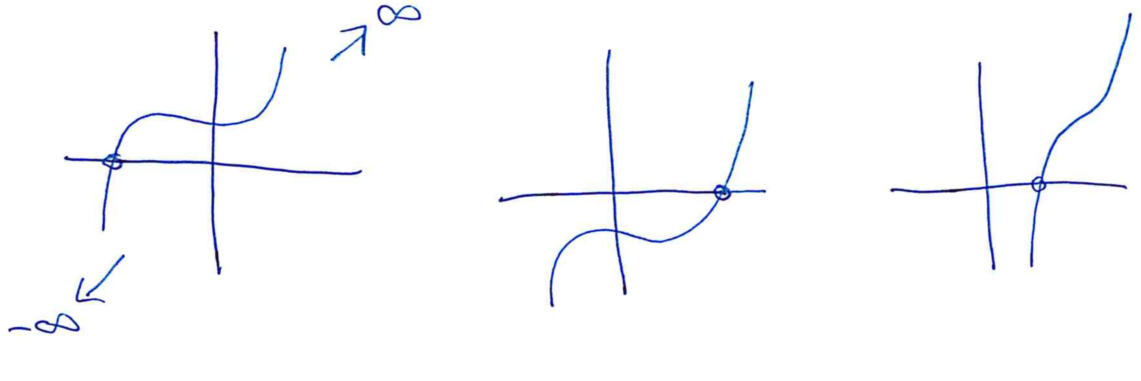
1

$$x_{2,3} = \frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2}$$

(komplexní ne-reálné kořeny)

graf

cca



lokální ex. $p(x)$

$$\frac{d}{dx}p(x) = 3x^2+4x+1 \overset{!}{=} 0 \quad 1$$

$$x_{ex} = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{6} = \frac{-4\pm2}{6} <$$

	maximum
-1	$6\cdot(-1)+4=-2$
$-\frac{1}{3}$	$6\left(-\frac{1}{3}\right)+4=2$
	minimum

1

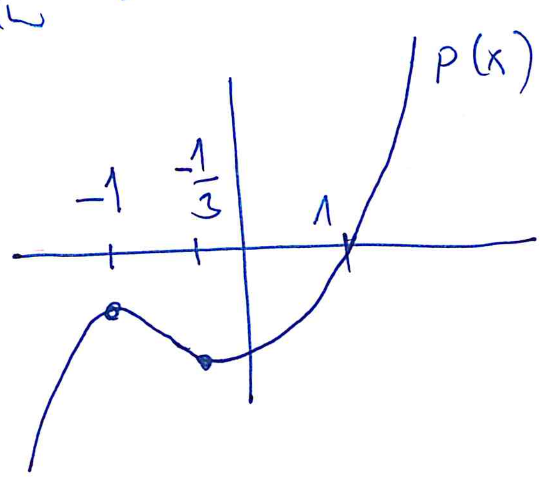
$$\frac{d^2}{dx^2}p(x) = 6x+4$$

$$p(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + (-1) - 4 = -4$$

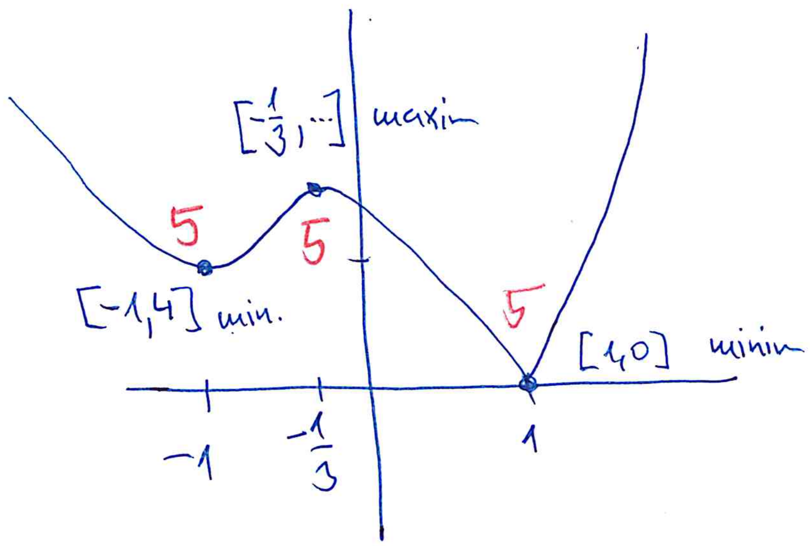
$$p\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^3 + 2\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{3}\right) - 4$$

$$= -\frac{1}{27} + \frac{6}{27} - \frac{9}{27} - \frac{4\cdot 27}{27} < 0$$

oba lokální extrémy $p(x)$ jsou záporné

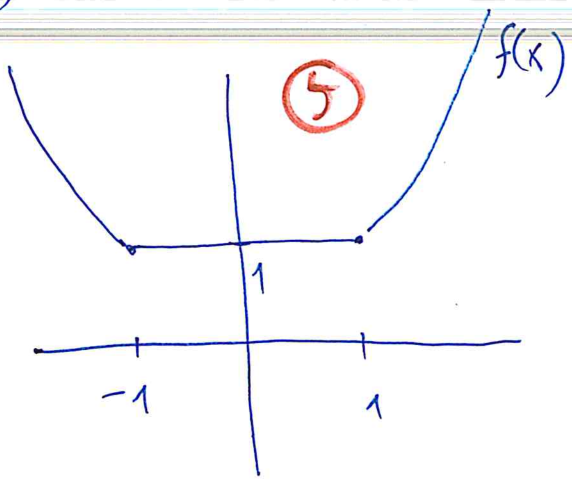


$f(x) = |p(x)|$ má tři lokální extrémy



2)

$$\int \underbrace{\max(1, x^2)}_{f(x)} \, dx$$



$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

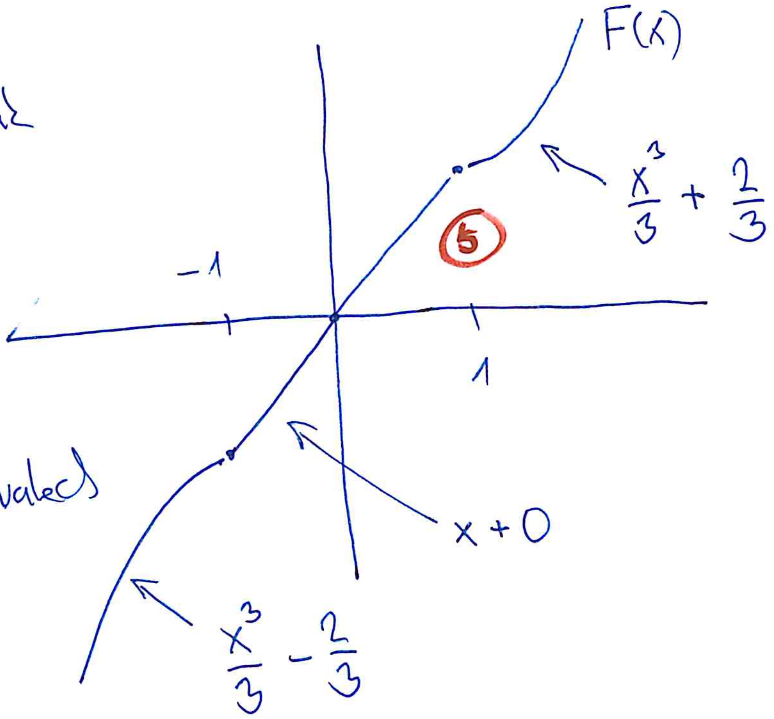
$$\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + \text{const.}$$ 5

$x \in (-1, 1)$

$$\int f(x)\,dx = \int 1\,dx = x + \text{const.}$$ 5

$F(x) = \int f(x)\,dx$

vyberme $F(x)$ tak aby $F(0) = 0$ (například)



konstanty v ostatních intervalech volíme tak aby $F(x)$ byla spojitá

3) Binomická rovnice $x^7 = 1$

má 7 ~~dvě~~ kořenů

$$x_{1,\dots 7} \in \left\{ \sqrt[7]{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{7} \cdot k\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7} \cdot k\right)\right), \quad k = 1,2,\dots 7 \right\}$$

12

• $\left(\{ x_{1\dots 7} \}, \cdot \right)$

uzavřenost násobení na množině

$$x_j \cdot x_k = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{7} j\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7} j\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{7} k\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7} k\right)\right)$$

5

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{7} j\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7} k\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{7} j\right) \sin\left(\frac{2\pi}{7} k\right)$$

$$+ \left[\cos\left(\frac{2\pi}{7} j\right) \sin\left(\frac{2\pi}{7} k\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{7} j\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7} k\right)\right] i$$

součtové vzorce

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{7}(j+k)\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{7}(j+k)\right) i$$

pro $(j+k) > 7$ využijeme 2π – periodicita funkcí sin a cos

1 • $x_7 = \cos(2\pi) + \sin(2\pi) i = 1 + 0i$ (neutrální prvek)

1 • $x_k^{-1} = x_{7-k}$ (inverzní prvek)

1 • asociativita násobení je důsledek asoc. $\begin{cases} \text{násobení v } \mathbb{C} \\ \text{sčítání } j+k \end{cases}$

4)

rovina $\sigma: \; x + y + z + 1 = 0$

přímka $p: \; x = 3t + 2$

$$y = 2t + 3$$

$$z = -1$$

---

průsečík prostým dosazením

$$(3t+2) + (2t+3) + (-1) + 1 = 0$$

$$5t + 5 = 0$$

$$t = -1 \qquad 2$$

$$A = [3(-1)+2, \; 2(-1)+3, \; -1]$$

$$= [-1, 1, -1]. \qquad 5$$

---

směrový vektor $\vec{s}_q$ přímky q je

- kolmý na směrový vektor $\vec{s}_p = [3,2,0]$ 2
- kolmý na normálový vektor roviny $\vec{n}_\sigma = [1,1,1]$ 2

$$\vec{s}_q = \vec{s}_p \times \vec{n}_\sigma = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = e_1 2 + e_2(-3) + e_3(3-2)$$

$$= [2, -3, 1] \qquad 5$$

$$q: \vec{s}_q \cdot t + A \qquad \boxed{q: \; \begin{aligned} x &= 2t - 1 \\ y &= -3t + 1 \\ z &= t - 1 \end{aligned}} \qquad 4$$

5) čtyřciferné sudé číslo z cifer $\{3,5,7,2,1,0\}$

má tvar

$$d_3\cdot 10^3 + d_2\cdot 10^2 + d_1\cdot 10 + d_0 = [d_3 d_2 d_1 d_0]$$

přičemž

$d_0 \in \{0,2\}$ 5 , $d_3 \neq 0$ 5

v případě $d_0 = 0$

vybíráme $d_3, d_2, d_1 \in \{3,5,7,2,1\}$

tedy

$5\cdot 4\cdot 3 = 60$ způsobů 5

v případě $d_1 = 2$

vybírám $d_3 \in \{3,5,7,1\}$ (aby byla zaručena čtyřcifernost)

$d_2, d_1 \in \{3,5,7,1,0\}$

tedy

$4\cdot 4\cdot 3 = 48$ způsobů 5

celkem existuje

$\boxed{108 \text{ hledaných čísel}}$