**Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2023/24**
**NMgr. program Odborná matematika**

Datum zkoušky: ______________ Registrační číslo uchazeče: _ _ _ _ _ _

Varianta 1

| Příklad | 1 | 2 | 3 | 4 | Celkem |
|---|---|---|---|---|---|
| Body | | | | | |

- Ke všem příkladům uvádějte dostatečně podrobný a přiměřeně okomentovaný postup.
- Příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný — odevzdávejte i pomocné výpočty.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

## Zadání

1 Načrtněte obrazec $O$ a vypočtěte objemy dvou těles, která vzniknou rotacemi obrazce kolem jednotlivých souřadných os

$$O = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \wedge y \leq 1 - \sqrt{x}\}.$$

2 Rozhodněte, pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ řada konverguje a pro která $\alpha$ nekonverguje a svůj závěr zdůvodněte

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}.$$

3 Nalezněte všechna řešení $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ maticové rovnice

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} X - X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

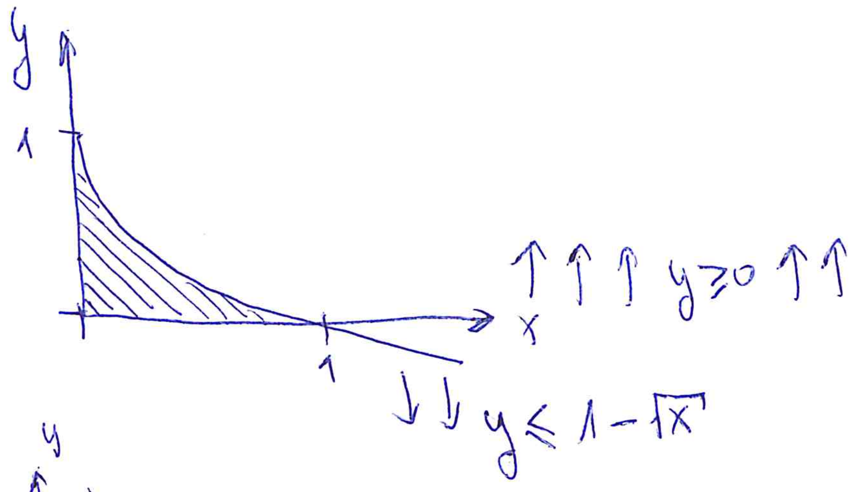
4 Rozdělení náhodné veličiny $X$ je dáno hustotou

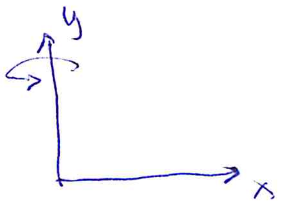
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}(x+2)^3 & \text{pro } x \in (-1, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

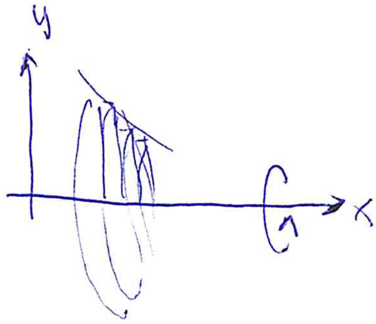
Určete distribuční funkci a rozptyl náhodné veličiny $X$.


+420 485 352 815 — info@tul.cz
Technická univerzita v Liberci — Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Univerzitní náměstí 1410/1, 461 17 Liberec 1 — www.fp.tul.cz

1




$$\int_0^1 \pi\left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^1 \pi\left(1-2x^{\frac{1}{2}}+x\right) dx$$

$$= \pi\left[x-2\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$= \pi\left(1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

$$y = 1-\sqrt{x}$$

$$y-1 = -\sqrt{x}$$

$$(y-1)^2 = x$$

$$\int_0^1 \pi\left((y-1)^2\right)^2 dy$$

$t = y-1$ $\quad$ $y=0 \rightarrow t = -1$

$dt = dy$ $\quad$ $y=1 \rightarrow t = 0$

$$= \int_{-1}^0 \pi t^4\, dt = \pi\left[\frac{1}{5}t^5\right]_{-1}^0 = \pi\left(-\frac{1}{5}(-1)^5\right) = \boxed{\frac{\pi}{5}}$$

② $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} = 1^{\alpha} + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + \dots =: S(\alpha)$

Ⓐ $\boxed{\text{pro } \alpha = -1}$

$S(-1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ součet harmonické řady

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots}_{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{diverguje} \to \infty}$

---

Ⓑ pro $k > 1$ je $f(\alpha) = k^{\alpha}$ rostoucí (exponenciální) funkce

tedy $(\alpha > \beta) \Rightarrow (k^{\alpha} > k^{\beta})$

pro $k = 1$ $k^{\alpha} = k^{\beta}$

tedy $\boxed{\text{pro } \alpha > -1}$

$$S(\alpha) = 1^{\alpha} + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + 4^{\alpha} + \dots$$

$$\geq S(-1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{diverguje} \to \infty}$

---

Ⓒ $\boxed{\text{pro } \alpha \leq -2}$ $S(-2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ (Bazilejský problém; důkaz konvergence např. integr. krit.)

ze stejného důvodu jako Ⓑ

a protože $S(\alpha) \geq 0$

a protože posloupnost částečných součtů je rostoucí

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{konverguje}}$

ve zbylém intervalu $(-2, -1)$ opět integ. krit. $\to$ konverguje

3) $$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} X - X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7a+3c & 7b+3d \\ -3a+7c & -3b+7d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6a-2b & 2a+6b \\ 6c-2d & 2c+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3c+2b & 3d-2a \\ -3a+2d & -3b-2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right] \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & d & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} /\cdot(-3) \\ /\cdot 2 \\ /\cdot 3 \\ /\cdot 2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -9 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} )+ \\ \\ )+ \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} a & d & b & c \end{array} \end{array} \to$$

reg. soust. jedno řešení

alternativně lze využít isomorfisma

$$\begin{bmatrix} u & v \\ -v & u \end{bmatrix} \longleftrightarrow u+iv$$

rovnice pak vypadá

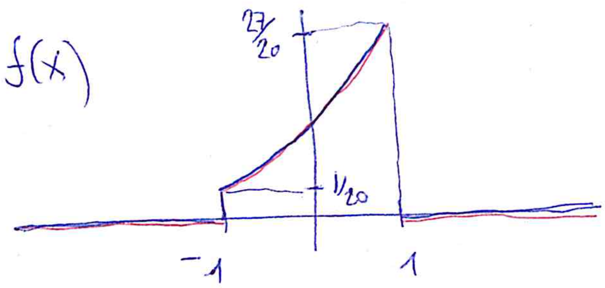
$$(7+3i)z - z = (2-i) + z(6+2i)$$

$$(-i)\cdot\backslash \quad iz = (2-i)$$

$$z = -1-2i$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(4)




## distribuční funkce

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{20}\int_{-1}^{x} (t+2)^3\,dt, & -1 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{20}\int_{-1}^{x} (t+2)^3\,dt = \left| \begin{array}{l} s = t+2 \\ ds = dt \\ t = -1 \to s = 1 \\ t = x \to s = x+2 \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{20}\int_{1}^{x+2} s^3\,ds = \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{4}\cdot s^4 \Big|_{1}^{x+2} = \underline{\frac{1}{80}(x+2)^4 - \frac{1}{80}}$$

## střední hodnota

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{20}\int_{-1}^{1} x(x+2)^3\,dx = \frac{1}{20}\int_{-1}^{1} x(x^3+6x^2+12x+8)\,dx = \frac{1}{20}\left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}6x^4 + \frac{1}{3}12x^3 + \frac{1}{2}8x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{20}\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{2}+4+4\right) - \left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{2}-4+4\right)\right]$$

$$= \frac{1}{20}\left(\frac{2}{5}+8\right) = \frac{1}{100}(2+40) = \underline{0{,}42}$$

Rozptyl

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xE(x) + E(x)^2) f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - 2E(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}_{E(x)} + E(x)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}_{1}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - E(x)^2 = \frac{1}{20} \int_{-1}^{1} (x+2)^3 x^2\,dx - \left(\frac{42}{100}\right)^2$$

$$= \frac{1}{20} \int_{-1}^{1} (x^5 + 6x^4 + 12x^3 + 8x^2)\,dx - \frac{1764}{10000}$$

$$= \frac{1}{20} \left[ \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}6x^5 + \frac{1}{4}12x^4 + \frac{1}{3}8x^3 \right]_{-1}^{1} - 0{,}1764$$

$$= \frac{1}{20} \left[ \left( \frac{1}{6} + \frac{6}{5} + 3 + \frac{8}{3} \right) - \left( \frac{1}{6} - \frac{6}{5} + 3 - \frac{8}{3} \right) \right] - 0{,}1764$$

$$= \frac{1}{20} \left( \frac{12}{5} + \frac{16}{3} \right) - 0{,}1764 = \frac{12}{100} + \frac{80}{100} \cdot \frac{1}{3} - 0{,}1764$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}80 - 0{,}0564 = 0{,}2\overline{6} - 0{,}0564 = \underline{0{,}2102\overline{6}}$$