Přijímací zkoušky z matematiky pro akademický rok 2023/24
NMgr. program Učitelství matematiky pro 2. st. ZŠ, resp. SŠ

Datum zkoušky: ____________________ Registrační číslo uchazeče: __ __ __ __ __ __

Varianta 1

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem
Body						

- Ke všem příkladům uvádějte dostatečně podrobný a přiměřeně okomentovaný postup.
- Příklad částečně spočítaný je lepší než nespočítaný — odevzdávejte i pomocné výpočty.
- Povolené pomůcky: psací a rýsovací potřeby.

Zadání

1 Nalezněte všecha řešení $x \in \mathbb{R}$ exponenciální rovnice

$$27 = 2 \cdot \left(3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} + 3^{x-4} + \cdots\right).$$

2 Nalezněte všecha řešení $x \in \mathbb{R}$ goniometrické rovnice

$$\sin(2x) + \cos(x) = 0.$$

3 Nalezněte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x) = \sqrt{x^6 - 6x^4 + 9x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4 Nalezněte alespoň jedno řešení $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ maticové rovnice

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} X - X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Bonus: Nalezněte všechna řešení a zdůvodněte, že jsou všechna.

5 Osm manželských párů se má posadit ke stolu, u jehož delších stran je po osmi židlích. Určete počet způsobů, jimiž se mohou rozsadit tak, aby všichni muži seděli na jedné straně stolu a manželé Novákovi, kteří jsou mezi osmi páry toho jména jediní, neseděli naproti sobě.

+420 485 352 815 — info@tul.cz
Technická univerzita v Liberci — Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Univerzitní náměstí 1410/1, 461 17 Liberec 1 — www.fp.tul.cz

1)

$$27 = 2 \cdot \left(3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} + \dots\right)$$

$$27 = 2 \cdot 3^x \cdot \left(1 + 3^{-1} + 3^{-2} + \dots\right) \leftarrow$$ nekonečná geometrická řada s kvocientem $1/3$

$$27 = 2 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{1 - 1/3} \cdot \frac{3}{3}$$

$$27 = \cancel{2} \cdot 3^x \cdot \frac{3}{\cancel{2}}$$

$$9 = 3^x$$

$$3^2 = 3^x$$

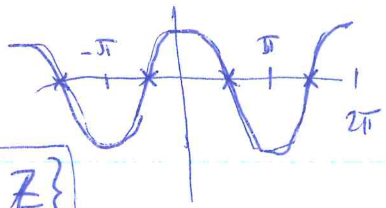
$$\boxed{x = 2}$$

2)

$$\sin(2x) + \cos(x) = 0$$

$$2\sin(x)\cos(x) + \cos(x) = 0$$

$$\left(2\sin(x) + 1\right)\cos(x) = 0$$

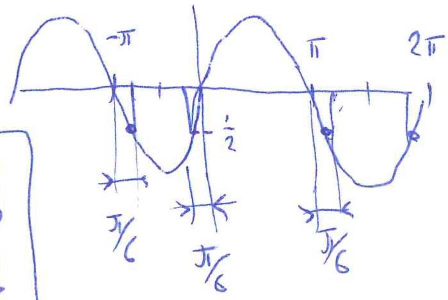


$\rightarrow \cos(x) = 0$

$$\boxed{x \in \left\{\pi \cdot n - \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}}$$

$\rightarrow 2\sin(x) + 1 = 0$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$



nebo $x \in \left\{2\pi n - \frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

nebo $x \in \left\{2\pi n + \frac{7}{6},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

3)

$$f(x) = \sqrt{x^6 - 6x^4 + 9x^2}$$

$$= \sqrt{(x^3 - 3x)^2}$$

$$= |(x^3 - 3x)|$$

$$= |x(x^2 - 3)|$$

---

lokální extrémy $f(x)$ =

lokální extrémy vnitřní funkce $x(x^2-3)$ (A)

+ nulové body vnitřní funkce $x(x^2-3)$ (B)

(A) $\frac{d}{dx}(x^3 - 3x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) \overset{!}{=} 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$(\pm 1)^3 - 3(\pm 1) = \pm 1 \mp 3 = \mp 2$

(B) $x^3 - 3x \overset{!}{=} 0$

$\to x = 0$

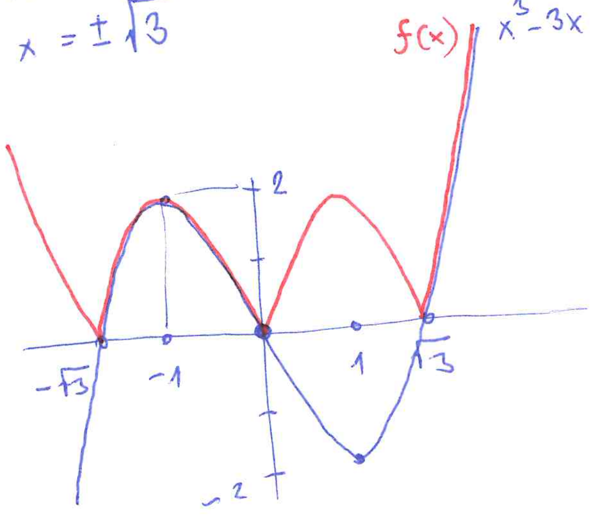
$\to x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$

Extrémy

x	$f(x)$	
$-\sqrt{3}$	0	minimum (nehladké)
-1	2	maximum (hladké)
0	0	min (nehl.)
1	2	max (hl.)
$\sqrt{3}$	0	min (nehl.)



4) $$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} X - X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7a+3c & 7b+3d \\ -3a+7c & -3b+7d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6a-2b & 2a+6b \\ 6c-2d & 2c+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3c+2b & 3d-2a \\ -3a+2d & -3b-2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right] \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} a & d & b & c & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right] \end{array} \begin{matrix} /\cdot(-3) \\ /\cdot 2 \\ /\cdot 3 \\ /\cdot 2 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -9 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 4 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right] \\ \begin{matrix} a & d & b & c & \end{matrix} \end{array} \rightarrow$$

reg. soust. jedno řešení

alternativně lze využít isomorfismu

$$\begin{bmatrix} u & v \\ -v & u \end{bmatrix} \longleftrightarrow u + iv$$

rovnice pak vypadá

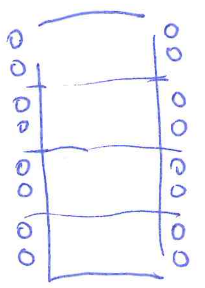
$$(7+3i)z - z = (2-i) + z(6+2i)$$

$$(-i)\cdot \backslash \quad iz = (2-i)$$

$$z = -1-2i$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

5)



M Ž

nebo Ž M

počet delších stran stolu → 2

počet způsobů, jak usadit muže na jedné straně stolu

→ $8!$

počet způsobů, jak usadit paní novákovou

→ 7

počet způsobů, jak usadit zbylých 7 žen na zbylých 7 židlí

→ $7!$

celkem

→ $2 \cdot 8! \cdot 7 \cdot 7!$

možností