MA2-E (1. hodina)

Posloupnosti (opakování)

Funkce, jejímž definičním oborem je množina **N** všech přirozených čísel, se nazývá **posloupnost (nekonečná číselná posloupnost).**

Příklady posloupností:

1. Čísla 2, 4, 6, 8, 10, 12, … jsou prvními členy posloupnosti sudých kladných čísel. Tato posloupnost vznikne tak, že každému přirozenému číslu n přiřadíme jeho dvojnásobek $2n$. Libovolný člen $a_n = 2n$. Zapisujeme ji $\{2n\}$.
2. Čísla $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ jsou prvními členy posloupnosti převrácených čísel k přirozeným číslům. Dostaneme ji přiřazováním převrácené hodnoty $\frac{1}{n}$ ke každému přirozenému číslu, takže její libovolný člen $a_n = \frac{1}{n}$.
3. Čísla 4, 7, 10, 13, 16, … jsou prvními členy posloupnosti, ve které je každému přirozenému číslu n přiřazeno číslo $1+3n$ a zapisujeme ji $\{1+3n\}$.

Aritmetická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy:

$$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d, \forall n \in \mathbf{N},$$

kde a, d jsou daná reálná čísla.

Číslo d nazýváme **diference** (diference = rozdíl), protože se rovná rozdílu $a_{n+1} - a_n$ kterýchkoliv dvou sousedních členů posloupnosti, tj. $d = a_{n+1} - a_n$.

Geometrická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně vztahy $a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n q,\ \forall n \in N$, kde a, q jsou daná čísla.

Číslo q se nazývá **kvocient geometrické posloupnosti**. Budeme předpokládat, že je $a \neq 0 \wedge q \neq 0$. V takovém případě je každé $a_n \neq 0$ a z rekurentního vztahu plyne pro kvocient (latinský název pro podíl), že $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Říkáme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní**, právě když existuje číslo $a \in \mathrm{R}$ takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathrm{N}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n \geqq n_0$ je $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Řady

Vložíme-li mezi každé dva členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ znaménko + , dostaneme schéma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

které zapisujeme znakem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (čteme suma a_n od $n = 1$ do nekonečna).

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečná řada. Čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nazýváme členy této řady.

Omezíme se jen na nekonečné geometrické řady a ukážeme si, jak v některých případech dospějeme k pojmu **součet nekonečné řady.**

Vytvoříme posloupnost:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1, \\
s_2 &= a_1 + a_2, \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

kterou nazveme **posloupností částečných součtů** dané nekonečné řady. Pro tuto posloupnost pak mohou nastat pouze tyto dva případy: - má limitu s;

- nemá limitu.

V prvním případě říkáme, že daná nekonečná řada je **konvergentní,** a číslo s nazýváme jejím **součtem**. V druhém případě říkáme, že nekonečná řada je **divergentní**, tj. nemá součet.

Pokud je posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, říkáme, že **nekonečná řada** (2) **je konvergentní**, a příslušnou limitu nazýváme **součet nekonečné řady** (2). Jestliže posloupnost $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní, říkáme, že **nekonečná řada** (2) **je divergentní**.

Je-li nekonečná řada (2) konvergentní a je-li její součet roven s, zapisujeme tuto skutečnost takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ označujeme tedy nejen nekonečnou řadu, ale též její součet (pokud ovšem existuje).

Je-li posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ geometrická a její kvocient je q, nazýváme nekonečnou řadu (2) **nekonečná geometrická řada** s kvocientem q.

Lze dokázat, že nekonečná geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^n$ je konvergentní jenom v tom případě,

když je $|q| < 1$; její součet potom je $s = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Pro $|q| \geq 1$ je řada divergentní.

Příklad Určete součet nekonečné geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^{n-1}}$.

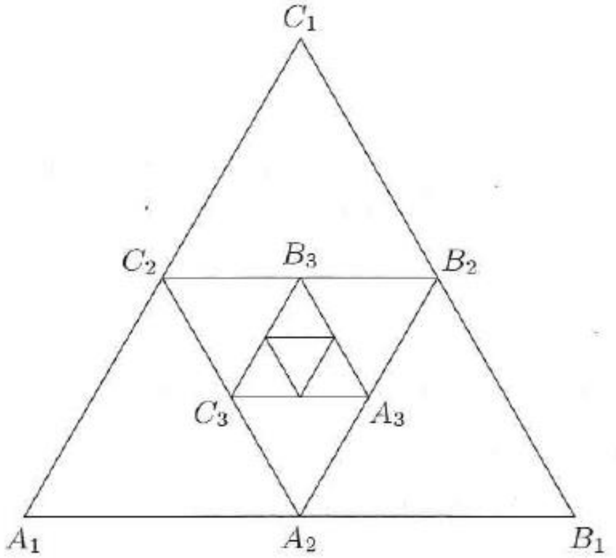
Příklad Najděte řešení dané rovnice: $\dfrac{8}{x+10} = 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{27}{x^3} + \cdots$.

Příklad 4

Do rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ o délce strany 2 je vepsán druhý trojúhelník $A_2B_2C_2$, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$ (obr. 3.11). Do tohoto trojúhelníku je stejným způsobem vepsán trojúhelník $A_3B_3C_3$ atd. Vypočítejte

a) součet obvodů, b) součet obsahů

všech takto vzniklých trojúhelníků.



Obr. 3.11

3.25 Zjistěte, které z dále uvedených řad jsou konvergentní; v kladném případě vypočtěte jejich součet:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{2^{n-1}}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

3.26 Je dána aritmetická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí d. Zjistěte, pro která a_1 a d je nekonečná aritmetická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Příklady jsou převzaty ze stránek: (řešení je zde uvedeno také)

https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js20/nekonecne_rady/web/pages/1-ciselne-rady.html

Věta 2.

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B.$$

Platí:

i. $$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = c \cdot A;$$

ii. $$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n = A \pm B,$$

pokud výrazy vpravo mají smysl, tj. neobdržíme-li $0 \cdot \infty$ nebo $\infty - \infty$.

Věta 3.

Pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom je

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

(1.1)

Podmínka 1.1. je podmínkou nutnou pro konvergenci řady, nikoli postačující. Existují tedy řady, které nekonvergují, ale podmínku 1.1 splňují.

Uvažujte nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{(-3)^n}.$$

Určete její součet.

Určete součet nekonečné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9 \cdot 3^n - 2^{n+1}}{6^n}.$$

Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Věta 5. ***(Srovnávací kritérium)***

Nechť $a_n, b_n \geq 0$ a nechť $a_n \leq b_n$ pro všechna dostatečně velká n. Platí:

i. Je-li $\sum_{n=N}^{\infty} b_n < +\infty$, pak $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < +\infty$.

ii. Naopak, je-li $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = +\infty$, pak $\sum_{n=N}^{\infty} b_n = +\infty$.

Rozhodněte o konvergenci/divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1234+n)}{n}.$$

Použitím srovnávacího kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1}.$$

Použitím srovnávacího kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^2}.$$

Věta 6. ***(Limitní srovnávací kritérium)***

Nechť $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ pro všechna dostatečně velká n a existuje (vlastní nebo nevlastní) limita

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Potom platí:

i. Je-li $\sum_{n=N}^{\infty} b_n < +\infty$ a $L < +\infty$, pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje.

ii. Je-li $\sum_{n=N}^{\infty} b_n = +\infty$ a $L > 0$, pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 7. ***(Podílové (d'Alambertovo) kritérium)***

Nechť $a_n > 0$ pro všechna velká n. Platí:

i. Je-li

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1$$

pro všechna dostatečně velká n a jistou konstantu k, pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje.

Rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Pomocí podílového kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Pomocí podílového kritéria vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Věta 8. ***(Odmocninové (Cauchyovo) kritérium)***

Nechť $a_n \geq 0$ pro všechna velká n.

i. Je-li

$$\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$$

pro všechna dostatečně velká n a jistou konstantu k, pak řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konverguje.

Pomocí (limitní verze) odmocninového kritéria rozhodněte o konvergenci (divergenci) řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n}.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n+3}\right)^n.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

Věta 9. ***(Integrální kritérium)***

Nechť je dána řada $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ a nechť je funkce f definovaná na intervalu $[N,\infty)$ pro jisté $N\in\mathbb{Z}$, přičemž funkce f je na tomto intervalu nezáporná, nerostoucí a platí

$$f(n)=a_n \qquad \text{pro všechna } n\geq N,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Potom platí, že

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konverguje, právě když } \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konverguje,}$$

tj.

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = +\infty \text{ právě tehdy, když } \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}.$$

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

Použitím integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}.$$