10. hodina *(MA2-E)*

Extrém funkce f na křivce g – vázané extrémy

Kromě funkce $f(x,y)$ je ještě zadána **vazba** (omezující podmínka pro x a y) ve tvaru $g(x,y)=0$. Hledáme extrémy funkce $f(x,y)$, které jsou vázány (leží na ní) křivkou $g(x,y)=0$.

Budeme používat dvě metody:

a) **Dosazovací metoda**: z vazby $g(x,y)=0$ vyjádříme x nebo y a dosadíme do $f(x,y)$, čímž získáme funkci jedné proměnné, a extrémy tedy hledáme podobně jako u funkce jedné proměnné. Tuto metodu použijeme v případě, že z rovnice vazby lze osamostatnit x nebo y.

b)

Věta 4.6 (Metoda využívající jakobiánu, nutná podmínka vázaného extrému). *Nechť funkce f a g mají v okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité obě parciální derivace a nechť funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ vázaný extrém vzhledem k vazbě dané rovnicí $g(x,y)=0$, potom platí, že determinant*

$$det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

U následujících úloh stačí, pokud najdete „podezřelé body" (body ve kterých se extrém může, ale nemusí nacházet). Důvodem je, že použití jakobiánu je nutnou, nikoli postačující podmínka vázaného extrému).

Příklad 6.2.1. Nalezněte vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = x + y,$$

vzhledem k podmínce $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1.$

Řešení:

Stac. bod A_i
$A_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
$A_2 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$

Příklad 6.2.2. Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = 27(x + y - 1)$$

vzhledem k podmínce $9(x^2 + y^2) = 2x^2y^2$.

Řešení:

Stac. bod A_i
$A_1 = [3, 3]$
$A_2 = [-3, -3]$

Následující úlohu řešte dosazovací metodou a určete, zda se v daném „podezřelém bodě“ skutečně extrém nachází a pokud ano, zda je to minimum nebo maximu:

Příklad 6.2.3. Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = xy - x + y - 1,$$

vzhledem k podmínce $x + y = 1$.

Řešení: Definiční obor funkce $D_f = \mathbb{R}^2$.

1. Z podmínky $x + y = 1$ můžeme vypočítat jak x, tak i y. Z podmínky vyjádříme např. y,

$$y = 1 - x.$$

2. Dosadíme $y = 1 - x$ do funkce $z = f(x, y) = xy - x + y - 1$ a dostaneme funkci jedné proměnné x,

$$z = x(1 - x) - x + 1 - x - 1 = -x^2 - x.$$

3. Hledáme extrémy funkce jedné proměnné.

$$z' = -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\tfrac{1}{2},$$
$$z'' = -2 < 0.$$

Druhá derivace je záporná pro všechny body definičního oboru funkce jedné proměnné z, a tedy i v bodě $x = -\frac{1}{2}$ je druhá derivace záporná, $z''(-\frac{1}{2}) = -2 < 0$. Funkce z má v bodě $x = -\frac{1}{2}$ ostré lokální maximum. Dopočítáme hodnotu y,

$$y = 1 - (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2}.$$

Funkce $f(x, y) = xy - x + y - 1$ má v bodě $A = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ vázané lokální maximum $z = \frac{1}{4}$.

Pozn.: pokud budete následující úlohy řešit metodou jakobiánu, stačí najít podezřelé body. Pokud budete úlohu řešit dosazovací metodou, určete, zda se v daném „podezřelém bodě“ skutečně extrém nachází a pokud ano, zda se jedná o minimum nebo maximum

1. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 2y + 1$ vzhledem k podmínce $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$.

2. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 12x + y - 3$ vzhledem k podmínce $y = -x^3 + 3$.

3. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 3y + 2x^4 + 9x^2 + 6$ vzhledem k podmínce $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.

4. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y}$ vzhledem k podmínce $y = -x^3$.

5. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ vzhledem k podmínce $y = x + 3$.

6. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = \sqrt{4x + y^2 + 5}$ vzhledem k podmínce $y = 2x - 3$.

7. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = x^3 + y^3$ vzhledem k podmínce $2x + 2y = 1$.

8. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = -8x + 6y - 5$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 = 100$.

9. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 3y - 4$ vzhledem k podmínce $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

10. Určete vázané extrémy funkce $f(x, y) = -3x - 9$ vzhledem k podmínce $3y - y^3 = x^2$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $[-\frac{3}{2}, 1]$ - vázané lokální minimum.

2. $[-2, 11]$ - vázané lokální minimum, $[2, -5]$ - vázané lokální maximum.

3. $[0, -2]$ - vázané lokální minimum, $[3, -56]$ - vázané lokální maximum, $[-3, -56]$ - vázané lokální maximum.

4. $[0,0]$ - vázané lokální minimum, $[\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}]$ - vázané lokální maximum.

5. $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ - vázané lokální minimum.

6. $[1,-1]$ - vázané lokální minimum.

7. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ - vázané lokální minimum.

8. $[8,-6]$ - vázané lokální minimum, $[-8,6]$ - vázané lokální maximum.

9. $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ - vázané lokální minimum, $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$ - vázané lokální maximum.

10. $[\sqrt{2}, 1]$ - vázané lokální minimum, $[-\sqrt{2}, 1]$ - vázané lokální maximum.

Globální extrém funkce f na uzavřené množině M

Definice 6.3.1.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ má na uzavřeném definičním oboru D_f **globální maximum** (absolutní maximum) v bodě $A \in \mathrm{D}_f$, jestliže $\forall X \in \mathrm{D}_f$ platí $f(X) \leq f(A)$.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ má na uzavřeném definičním oboru D_f **globální minimum** (absolutní minimum) v bodě $A \in \mathrm{D}_f$, jestliže $\forall X \in \mathrm{D}_f$ platí $f(X) \geq f(A)$.

Je-li $f(X) < f(A)$ resp. $f(X) > f(A)$, hovoříme o **ostrém globálním maximu** resp. **ostrém globálním minimu**.

Poznámka

*Množina D_f se nazývá **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body. **Hraničním bodem** množiny D_f rozumíme takový bod, jehož každé okolí obsahuje body X ležící v D_f, tj. $X \in \mathrm{D}_f$, a současně obsahuje body Y neležící v D_f, tj. $Y \notin \mathrm{D}_f$. Také množina $\mathbb{R}^n$ je množina uzavřená. Ovšem hranice této množiny je prázdná množina, $\emptyset$.*

Poznámka

Na rozdíl od lokálních extrému, které se hledají na okolích bodů, hledáme globální extrémy na celé množině D_f.

Uvažujme spojitou a alespoň dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci (tj. existují spojité parciální derivace alespoň až do druhého řádu) $z = f(x, y)$, definovanou na uzavřené množině D_f. Nechť hranice této množiny je křivka o rovnici $g(x, y) = 0$. Globální extrémy funkce f na množině D_f budeme určovat takto:

1. Určíme lokální extrémy funkce f na množině D_f, ze které vyloučíme hranici.

2. Určíme lokální extrémy této funkce vázané podmínkou $g(x, y) = 0$.

3. Porovnáme funkční hodnoty všech extrémů. Extrém s největší funkční hodnotou bude **globálním maximem**, extrém s nejmenší funkční hodnotou bude **globálním minimem**.

Při vyšetřování globálních extrémů na dané množině stačí určit všechny podezřelé body: uvnitř množiny body, které mají parciální derivaci podle libovolné proměnné rovnou nule a na hranici množiny body, které splňují nutnou podmínku pro vázaný extrém na hraniční křivce (jakobiho determinant nebo identifikace bodů s pomocí dosazovací metody). Poté funkční hodnoty ve všech těchto bodech porovnáme a určíme, kde je globální maximum a globální minimum funkce na množině.

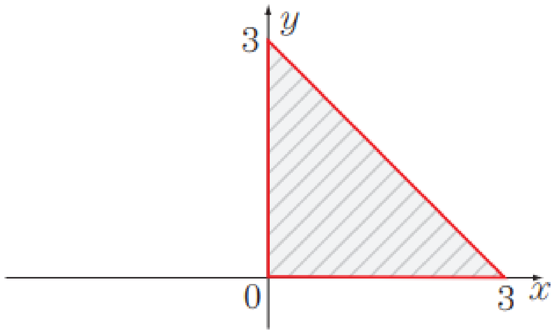
Poznámka

Je-li hranice tvořena konečným počtem křivek, vyšetřujeme vázané extrémy na jednotlivých křivkách. V tomto případě ovšem musíme uvažovat i vrcholy hraničních křivek při konečném porovnávání funkčních hodnot.

Příklad 6.3.1. Nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x, y)$,

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$$

je-li $\mathrm{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq -x + 3\}$.

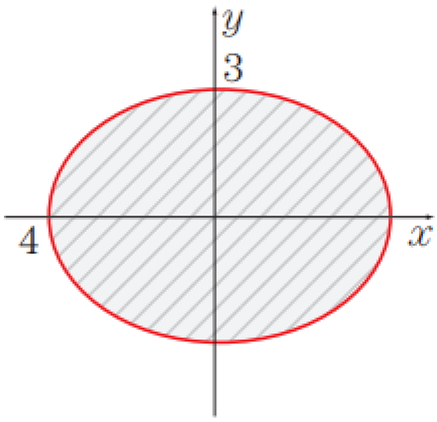


Řešení:

Funkce f má v bodě $A = [0, 0]$ globální maximum $z = -1$ a v bodě $C = [0, 3]$ globální minimum $z = -19$.

Příklad 6.3.2. Na elipse $9x^2 + 16y^2 \leq 144$ nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x, y)$,

$$f(x, y) = 9x^2 - 36x + 16y^2 - 64y.$$



Řešení.

Funkce f má v bodě $A_1 = [2, 2]$ globální minimum $z = -100$ a v bodě $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$ globální maximum $z = 384$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - y$ na čtverci s vrcholy $[1, 1]$, $[3, 1]$, $[1, 3]$, $[3, 3]$.

2. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na trojúhelníku s vrcholy $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[0, 1]$.

3. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 4y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 1$.

4. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 3x + 4y + 1$ na kruhu $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.

5. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 5x - 3y + 1$ na trojúhelníku s vrcholy $[1, 4]$, $[-2, 1]$, $[0, -1]$.

6. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na trojúhelníku s vrcholy $[1, 4]$, $[-2, 1]$, $[0, -1]$.

7. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na čtverci s vrcholy $[0, 0]$, $[-1, 0]$, $[-1, -1]$, $[0, -1]$.

8. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 16$.

9. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = 2x + 4y + 1$ na elipse $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

10. Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$ na čtverci s vrcholy $[2, 0]$, $[0, 2]$, $[-2, 0]$, $[0, -2]$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $[1, 3]$ - globální minimum, $[3, 1]$ - globální maximum. Návod: pro vyjádření hraničních křivek stačí najít rovnice přímek, které jsou určeny vrcholy čtverce.

2. $[0, 0]$ - globální minimum, $[2, 0]$ - globální maximum.

3. $[0, -1]$ - globální minimum, $[0, 1]$ - globální maximum.

4. $[\frac{12}{5}, \frac{1}{5}]$ - globální minimum, $[\frac{18}{5}, \frac{9}{5}]$ - globální maximum.

5. $[-2, 1]$ - globální minimum, $[0, -1]$ - globální maximum.

6. $[1, 4]$ - globální minimum, $[0, 1]$ - globální maximum.

7. $[-1, -1]$ - globální minimum, $[0, 0]$ - globální maximum.

8. $[0, -4]$ - globální minimum, $[0, 1]$ - globální maximum.

9. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}]$ - globální minimum, $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}]$ - globální maximum.

10. $[0, 0]$ - globální minimum, $[0, -2]$ - globální maximum, $[0, 2]$ - globální maximum.

13. Stanovte vázané extrémy dané funkce f vzhledem k daným vazbám:

(a) $f(x,y) = x - y$ na kružnici $x^2 + y^2 = 2$,
(b) $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ na přímce $x - 2y + 7 = 0$,
(c) $f(x,y) = e^{xy-4x}$ na úsečce $y - 2x = 0$, $x \in \langle 0, 5 \rangle$,
(d) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ na čtvrtkružnici $x^2 + y^2 = 8$, $x \geq 0$, $y \geq 0$,
(e) $f(x,y) = e^{xy}$ na kružnici $x^2 + y^2 = 8$,
(f) $f(x,y) = (x + 2y^2)\, e^x$ na přímce $[x, y] = [-1, 2] + t(-1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$,
(g) $f(x,y,z) = x - 2y + z$ na povrchu elipsoidu $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 1$.

14. Stanovte globální extrémy daných funkcí definovaných na daných množinách:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 4$,
(b) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na trojúhelníku vymezeném přímkami $x - y = 1$, $x = -1$, $x + y = 1$,
(c) $f(x,y) = xy$ na množině $x^2 + y^2 \leq 8$, $xy \leq 0$.