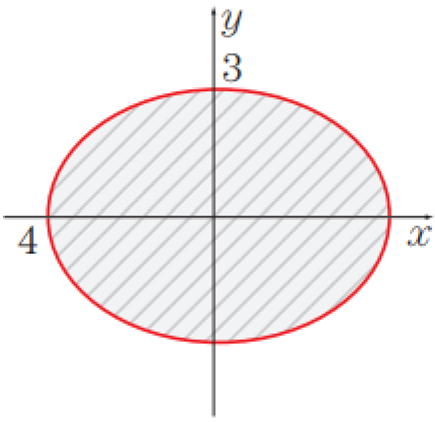
11. hodina ***(MA2-E)***

Globální extrém funkce f na uzavřené množině M *(pokračování)*

Příklad 6.3.2. Na elipse $9x^2 + 16y^2 \leq 144$ nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x, y)$,

$$f(x, y) = 9x^2 - 36x + 16y^2 - 64y.$$



Řešení.

Funkce f má v bodě $A_1 = [2, 2]$ globální minimum $z = -100$ a v bodě $A_3 = [-\frac{12}{5}, -\frac{12}{5}]$ globální maximum $z = 384$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - y$ na čtverci s vrcholy $[1,1]$, $[3,1]$, $[1,3]$, $[3,3]$.

2. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ na trojúhelníku s vrcholy $[0,0]$, $[2,0]$, $[0,1]$.

3. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = 4y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 1$.

4. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = 3x + 4y + 1$ na kruhu $(x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 1$.

5. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = 5x - 3y + 1$ na trojúhelníku s vrcholy $[1,4]$, $[-2,1]$, $[0,-1]$.

6. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na trojúhelníku s vrcholy $[1,4]$, $[-2,1]$, $[0,-1]$.

7. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na čtverci s vrcholy $[0,0]$, $[-1,0]$, $[-1,-1]$, $[0,-1]$.

8. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2y$ na kruhu $x^2 + y^2 \leq 16$.

9. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = 2x + 4y + 1$ na elipse $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

10. Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = (x-y)^2 + x^2$ na čtverci s vrcholy $[2,0]$, $[0,2]$, $[-2,0]$, $[0,-2]$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $[1,3]$ - globální minimum, $[3,1]$ - globální maximum. Návod: pro vyjádření hraničních křivek stačí najít rovnice přímek, které jsou určeny vrcholy čtverce.

2. $[0,0]$ - globální minimum, $[2,0]$ - globální maximum.

3. $[0,-1]$ - globální minimum, $[0,1]$ - globální maximum.

4. $[\frac{12}{5}, \frac{1}{5}]$ - globální minimum, $[\frac{18}{5}, \frac{9}{5}]$ - globální maximum.

5. $[-2,1]$ - globální minimum, $[0,-1]$ - globální maximum.

6. $[1,4]$ - globální minimum, $[0,1]$ - globální maximum.

7. $[-1,-1]$ - globální minimum, $[0,0]$ - globální maximum.

8. $[0,-4]$ - globální minimum, $[0,1]$ - globální maximum.

9. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}]$ - globální minimum, $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}]$ - globální maximum.

10. $[0,0]$ - globální minimum, $[0,-2]$ - globální maximum, $[0,2]$ - globální maximum.

Diferenciální rovnice

Definice 7.1.1.

Rovnice tvaru $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots, y', y, x) = 0$ se nazývá **diferenciální rovnice** n**-tého řádu** pro funkci $y = y(x)$. Speciálně je

$$F(y', y, x) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad y' = f(x, y)$$

diferenciální rovnice prvního řádu.

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace hledané funkce $y(x)$.

Řešením diferenciální rovnice je každá funkce, která rovnici vyhovuje (na zadané množině).

Graf konkrétního řešení rovnice se nazývá **integrální křivka**.

- **obecné řešení** rovnice 1. řádu představuje množinu funkcí tvaru

$$\phi(x, y, C) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad y = \varphi(x, C)\,;$$

- **partikulární řešení** je konkrétní funkce získaná z obecného řešení volbou nebo výpočtem konstanty C;
- **výjimečné řešení** nelze získat z obecného pro žádnou hodnotu C; existuje pouze u některých typů rovnic a v tomto textu se jím nebudeme až na výjimky zabývat.

(Obecné řešení má obecný parametr: konstantu C, která může nabývat různých hodnot. Partikulární řešení má konkrétní hodnotu konstanty C, která se určí na základě dalších podmínek)

Příklad 7.2.1. Je dána rovnice $y' = -2x$. Určete
a) její obecné řešení,
b) partikulární řešení určené podmínkou $y(1) = 2$.

Řešení:

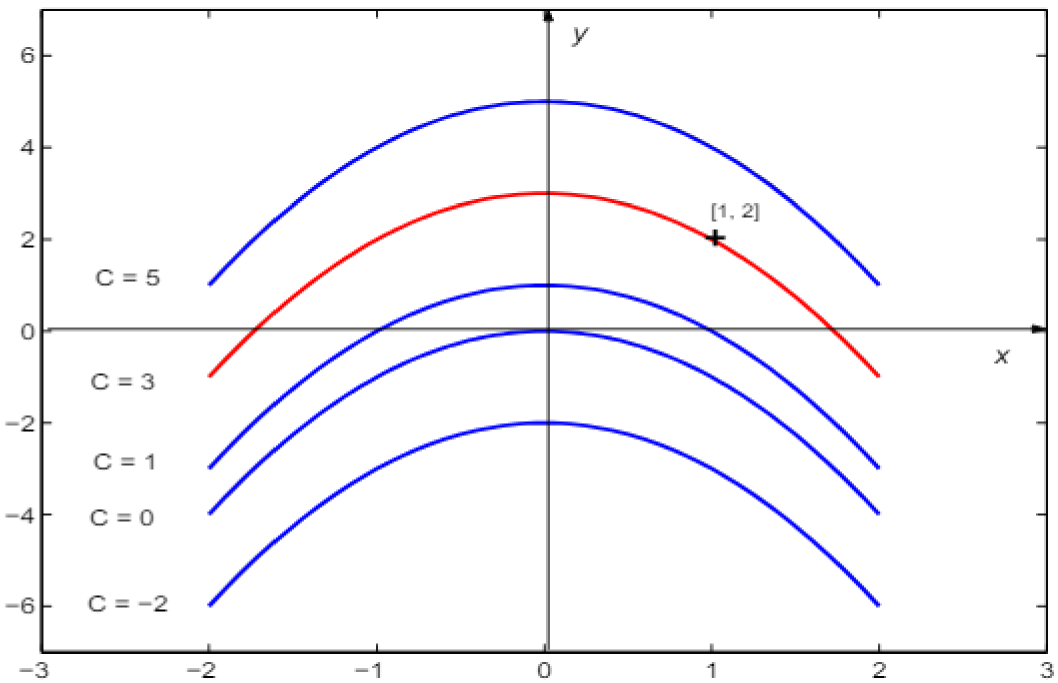
a) $y(x) = \int(-2x)\,dx = -x^2 + C$, proto soustava parabol o rovnicích $y = C - x^2$ (obr. 7.2.1) představuje obecné řešení úlohy. O jeho správnosti se lze snadno přesvědčit zkouškou.

b) Zadaná podmínka znamená, že hledáme integrální křivku, která prochází bodem $[1, 2]$. Dosazením těchto souřadnic do obecného řešení dostáváme

$$2 = C - 1^2\,, \qquad \text{odkud} \qquad C = 3\,.$$

Výsledným partikulárním řešením je tedy parabola (na obr. 7.2.1 červeně)

$$y_p = 3 - x^2\,.$$



Obr. 7.2.1. Integrální křivka partikulárního řešení příkladu 7.2.1. a několik dalších parabol z obecného řešení.

3. Najděte obecné řešení rovnic:

a) $(1-2y)y' = 2x$ b) $y' \cos y = \sin x$.

4. Řešte počáteční úlohy:

a) $\frac{y'}{y^2} = 2x, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$, b) $y'.\mathrm{e}^y = 1, \quad y(1) = 0.$

Řešení:

3. a) $y - y^2 = x^2 + C$, b) $y = \arcsin(C - \cos x)$.

4. a) $y = \frac{1}{x^2-2}$, b) $y = \ln x$.

Způsob řešení diferenciálních rovnic

1) Separace proměnných

U tohoto typu, který zapisujeme obvykle ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$, postačuje k separaci jednoduchá úprava rovnice (využijeme identity $y' = dy/dx$):

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)\,dx\,,$$

po níž může hned následovat integrace.

Příklad 8.1.1. Najděte řešení rovnice $y' = -y.\mathrm{cotg}x$.

Řešení: Separace vede k rovnici

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx\ ,$$

kterou po integraci zapíšeme takto:

$$\ln|y| = -\ \ln|\sin x| + \ln C\ .$$

Po odlogaritmování dostáváme obecné řešení

$$y(x) = \frac{C}{\sin x}\ .$$

Příklad 8.1.2. Najděte řešení počáteční úlohy $(x-1)y' + y^2 = 0\,, y(2) = -1$.

Řešení: Postup při separaci je zřejmý z následujících kroků (přesvědčte se, že rovnici lze zapsat i ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$):

$$(x-1)y' + y^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = -y^2 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{x-1}\,.$$

Integrací obdržíme

$$-\frac{1}{y} = -\ln(x-1) + C\,, \qquad \text{odkud} \qquad y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - C}\,.$$

Dosadíme-li do získaného obecného řešení z počáteční podmínky $x = 2$, $y = -1$, bude

$$-1 = \frac{1}{\ln 1 - C}\,, \qquad \text{tj.} \qquad C = 1.$$

Nyní můžeme zapsat hledané řešení počáteční úlohy:

$$y_p(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - 1}\,.$$

1. Řešte následující separovatelné rovnice:

a) $y' \sin x = y \cos x$,

b) $x^2 y' - y^2 = 1$,

c) $2xyy' = x + 2$,

d) $(x + y)y' = 1$.

3. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $y' + \mathrm{e}^y = 0, \quad y(0) = 0$,

b) $(x + y)y' = x - y, \quad y(5) = 2$,

Řešení:

1. a) $y = C.\sin x$, b) $y = \mathrm{tg}\,(C - \frac{1}{x})$, c) $y^2 = x + 2\ln x + C$,

d) $y - \ln(x + y + 1) = C$.

2. a) $y = -\frac{x}{\ln x + C}$, b) $y = x\mathrm{e}^{Cx+1}$, c) $y = x(\ln x + C)^2$.

3. a) $y = \ln(1 - x)$, b) $x^2 - 2xy - y^2 = 1$,