11. hodina

Matice

Definice. Jsou dány dvě matice A, B stejného typu $m \times n$ a reálné číslo r. Definujeme následující početní *operace* (úkony):

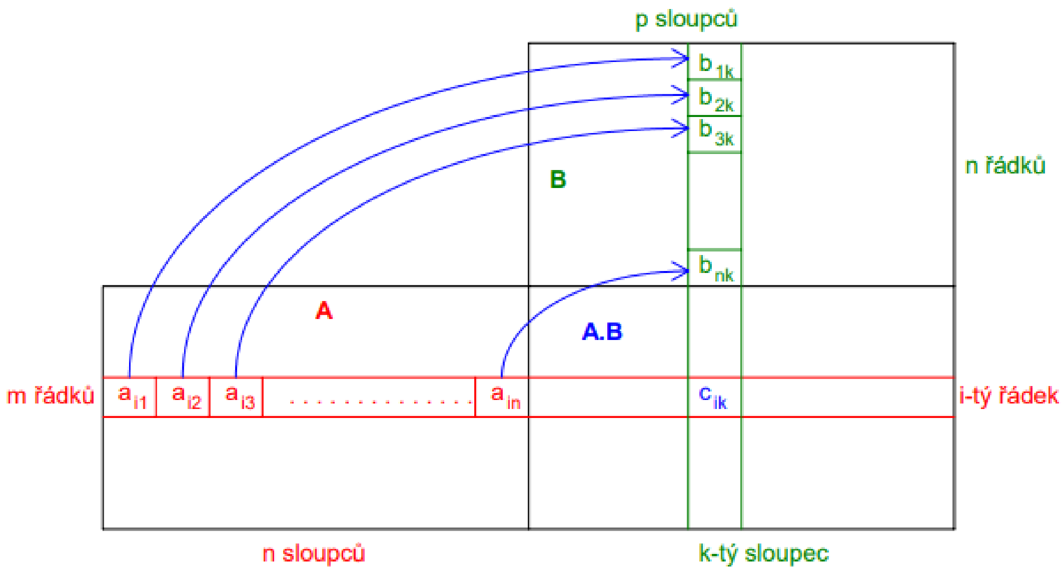
součet matic	$A + B$	prvky výsledku se vypočtou jako $a_{ij} + b_{ij}$
rozdíl matic	$A - B$	prvky výsledku se vypočtou jako $a_{ij} - b_{ij}$
r-násobek matice	$r \cdot A$	prvky výsledku se vypočtou jako $r \cdot a_{ij}$
matice *transponovaná*	A^{T}	výsledkem je matice typu $n \times m$, kde $a^{\mathrm{T}}{}_{ij} = a_{ji}$

Ukázky: Pro matice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1.2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ bude

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3.2 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0.8 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad 2A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Sečtěte matice A + B a M + N jestliže platí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Příklad Vypočtěte součin matic $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8-6 & -2 \\ -12+12 & 4 \\ 4-9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -2 \\ 0 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Vynásobte matice A.B a C.D jestliže platí:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

6. Daná je matice A. Zjistěte matici A^2 jestliže platí:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Vypočtěte součet daných matic:

a) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}.\mathbf{A}$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}.\mathbf{A}$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

f) $\mathbf{A}^2$, $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení:

6. a) $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 29 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B}.\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 19 \\ -8 & 2 & 6 \\ -1 & 9 & 17 \end{pmatrix}$,

b) $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -19 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{B}.\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 17 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & -19 & 1 & 16 \\ -5 & 17 & -9 & -12 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -1 \\ -14 & -14 & 11 \end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Hodnost matice

Definice 2.4.3.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n). Považujme řádky za aritmetické vektory vektorového prostoru V_n. **Hodnost matice $\mathbf{A}$** je r (značíme $h(\mathbf{A}) = r$), existuje-li r lineárně nezávislých řádků matice $\mathbf{A}$ a každých r+1 řádků je lineárně závislých.

Věta 2.4.2. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná matice typu (m, n). Hodnost matice $\mathbf{A}$ se nezmění při kterékoliv z následujících elementárních úprav:

1. záměně pořadí řádků (sloupců),
2. násobení jednotlivých řádků (sloupců) čísly $k_i \neq 0$,
3. přičtení k některému řádku (sloupci) lineární kombinace zbývajících řádků (sloupců),
4. vynecháním řádku, který je lineární kombinací zbývajících řádků.

Důkaz: Žádná z uvedených úprav nemění počet lineárně nezávislých řádků či sloupců.

Příklad Určeme hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Budeme upravovat matici $\mathbf{A}$ podle věty 2. Ke 2. řádku přičteme (-1) násobek 1. řádku a ke 4. řádku (-2) násobek 2. řádku

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} .(-1) \\ \\ .(-2) \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

3. a 4. řádek můžeme vynechat (dle 4. bodu věty 2).

Je vidět, že v upravené matici jsou dva lineárně nezávislé řádky, tzn., že hodnost matice $\mathbf{A}$ je dvě, h($\mathbf{A}$) = 2.

4. Vypočtěte hodnost matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ -7 & 10 & -20 \end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \\ 5 & -10 & 15 \end{pmatrix}$, e) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, f) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Řešení

4. a) h($\mathbf{A}$) = 2, b) h($\mathbf{B}$) = 2, c) h($\mathbf{C}$) = 2, d) h($\mathbf{D}$) = 1, e) h($\mathbf{M}$) = 3, f) h($\mathbf{F}$) = 3.

Věta 2.5.2. (Frobeniova). Soustava rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ má řešení, právě když h($\mathbf{A}$) = h($\mathbf{A}|\mathbf{B}$). Označíme-li h($\mathbf{A}$) = h($\mathbf{A}|\mathbf{B}$) = r a $\mathbf{A}$ je typu (m, n), pak v případě r = n (n počet neznámých) má soustava jediné řešení a v případě n > r má soustava nekonečně mnoho řešení, která můžeme zapsat pomocí (n - r) parametrů.

Důkaz je obtížný a nebudeme jej provádět.

Gaussova eliminace:

Příklad Řešme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ 5x_3 &= -7 \\ x_1 &+ 3x_2 &+ x_3 &= 5 \\ 2x_1 &+ x_2 &+ x_3 &= 2 \\ 2x_1 &+ 3x_2 &- 3x_3 &= 14\,. \end{aligned}$$

A	**B**	Σ	úpravy
1 1 5	−7	0	
1 3 1	5	10	$r_2 - r_1$
2 1 1	2	6	$r_3 - 2r_1$
2 3 −3	14	16	$r_4 - 2r_1$
1 1 5	−7	0	
0 2 −4	12	10	
0 −1 −9	16	6	$2r_3 + r_2$
0 1 −13	28	16	$2r_4 - r_2$
1 1 5	−7	0	
0 2 −4	12	10	
0 0 −22	44	22	
0 0 −22	44	22	$r_4 - r_3$
1 1 5	−7	0	
0 2 −4	12	10	
0 0 −22	44	22	
0 0 0	0	0	

https://www.priklady.eu/cs/matematika/matice.alej

24. Gaussovu metodou řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x+3y&=9\\ x-y&=2 \end{aligned}$$

25. Řešte soustavu rovnic Gaussovu metodou:

$$\begin{aligned} x+y-z&=-1\\ 2x-y+2z&=8\\ x-3y+2z&=3 \end{aligned}$$

26. Řešte soustavu rovnic Gaussovu metodou:

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=0\\ 2x-y+z&=3\\ 3x+y-z&=5 \end{aligned}$$

27. Řešte soustavu rovnic Gaussovu metodou:

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=0\\ x+y-2z&=0\\ 2x+3y+z&=0 \end{aligned}$$